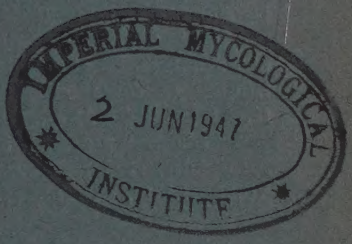
COMPTES RENDUS
(DOKLADY)
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

1941



VOLUME XXX

№ 8

ÉDITION DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
MOSCOU

AVIS AUX AUTEURS

Les «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS» paraissent tous les dix jours. Chaque numéro a 96 pages en moyenne. Neuf numéros composent un volume pourvu d'une table des matières. Il y a quatre volumes par année.

Les «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» en de courtes communications précisent l'essentiel des travaux en préparation. Ces articles, ne dépassant pas en règle générale quatre pages, sont donnés en l'une des trois langues: française, anglaise ou allemande. Ils embrassent les sciences mathématiques, physiques, naturelles et appliquées, mettant au jour les résultats de recherches scientifiques en cours ou qui viennent d'être achevées, et représentant ainsi les plus récentes données de l'investigation scientifique.

L'auteur a droit à 50 exemplaires de son article.

Adressez les manuscrits à la Rédaction des «Comptes Rendus», Moscou 19, Volkhonka 18, chambre 15.

20 Mars

COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

COMITÉ DE RÉDACTION

A. Borissiak, de l'Académie, **A. Deborin,** de l'Académie, **A. Fersman,** de l'Académie, **A. Frumkin,** de l'Académie, **A. Kolmogoroff,** de l'Académie, **A. Richter,** de l'Académie, **S. Wawilow,** de l'Académie

NOUVELLE SÉRIE

9-me année

Paraissant tous les dix jours

1941

VOLUME XXX, № 8

TABLE DES MATIÈRES

MATHÉMATIQUES Pages

I. M. Vinogradoff, Member of the Academy **(И. М. Виноградов).** Some General Property of Distribution of Products of Prime Numbers . . . 681

N. Gunther, membre correspondant de l'Académie **(Н. Гюнтер).** Sur les équations intégrales de troisième espèce 683

C. Mardjanichvili (К. Марджанишвили). Sur la démonstration du théorème de Goldbach-Vinogradoff 687

Z. Schapiro (З. Шапиро). Sur l'existence des représentations quasi-conformes 690

L. Melzer (Л. Мельцер). Sur la position correcte du problème de Goursat 693

Philippe Kharchiladze (Ф. Харшиладзе). Sur la méthode de sommation de S. Bernstein et W. Rogosinsky 697

PHYSIQUE

B. S. Dželepow and **A. A. Konstantinov (Б. С. Джелепов и А. А. Константинов).** On the β-Ray Spectra of Mn^{56}, Dy^{165} and Au^{198} 701

I. S. Panasjuk and **G. N. Flerov (И. С. Панасюк и Г. Н. Флеров).** Spontaneous Division in Thorium 704

V. Berestetzky and **A. Migdal (В. Берестецкий и А. Мигдал).** Mechanism of Nuclear Fission 706

T. A. Goloborodko and **A. I. Leipunski,** Member of the Ukrainian Academy **(Т. А. Голобородько и А. И. Лейпунский).** The Nuclear Scattering Cross-Sections (σ_{sc}) for Heavy Elements with Photoneutrons of about 800 keV 708

PHYSIQUE DU GLOBE

M. E. Schwetz (М. Е. Швец). Bestimmung des Koeffizienten der turbulenten Zähigkeit für Bewegungen in der Atmosphäre 710

BIOPHYSIQUE

I. I. Stas (И. И. Стась). On Certain Physical Features of Fishes of the Black Sea 715

CHIMIE

J. A. Arbusov and **N. D. Zelinsky**, Member of the Academy **(Ю. А. Арбузов** и **Н. Д. Зелинский)**. Isomerization of Cyclohexene and Heptene-1 in the Presence of Oxides of Metals 717
J. A. Arbusov and **N. D. Zelinsky (Ю. А. Арбузов** и **Н. Д. Зелинский)**. Action of Aluminium Chloride on Cyclohexane 721
B. A. Arbusov (Б. А. Арбузов). On the Structure of *l*-Pimaric Acid . . 723
N. V. Elagina and **N. D. Zelinsky (Н. В. Елагина** и **Н. Д. Зелинский)**. Contact Dehydrogenation of Benzbicyclononene 726
N. V. Elagina and **N. D. Zelinsky**, Member of the Academy **(Н. В. Елагина** и **Н. Д. Зелинский)**. On Cyclohexyl-Cycloheptyl-Methane and its Relation towards Catalytic Dehydrogenation 728
S. A. Borovick and **T. F. Borovick-Romanova (С. А. Боровик** и **Т. Ф. Боровик-Романова)**. Change of Intensity in Rubidium Lines Caused by the Presence of Certain Salts and Acids in Solution . . . 732

CHIMIE PHYSIQUE

D. A. Frank-Kamenetzky (Д. А. Франк-Каменецкий). Ignition and Extinction of Solid Surfaces 734

GÉOCHIMIE

D. S. Beliankin, Corresponding Member of the Academy, **V. V. Lapin** and **I. M. Shumilo (Д. С. Белянкин, В. В. Лапин** и **И. М. Шумило)**. New Data on the Optics and Chemistry of Corundum 738

GÉOLOGIE

J. K. Dzevanovsky (Ю. К. Дзевановский). On the Formation of Intrusive Sheets 742

GÉNÉTIQUE

J. M. Olenov and **J. S. Kharmatz (Ю. М. Оленов** и **И. С. Хармац)**. On the Origination of Obligate Heterozygosity 745

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE

N. N. Shevchenko (Н. Н. Шевченко). Slag from Chalcopyrite Tried under Hemp 748

ANATOMIE DES PLANTES

E. R. Hübbenet (Е. Р. Гюббенет). Zur Frage über die Entwicklung des Blattes von *Theobroma Cacao* 751

MORPHOLOGIE DES PLANTES

A. A. Sapehin (А. А. Сапегин). Formation of Organs in Wheat and Barley while Entering into the Light Phase 754

BIOLOGIE DES PLANTES

W. N. Sukatschew (В. Н. Сукачев). Über den Einfluss der Intensität des Kampfes ums Dasein zwischen den Pflanzen auf deren Entwicklung 757
I. N. Sveshnikova (И. Н. Свешникова). New Method for Comparative Cytological Study of Species 761

HISTOLOGIE

L. S. Sutulov (Л. С. Сутулов). Die Besonderheiten des Wachstums ausserhalb des Organismus der Fortsätze sensorischer Neuronen 764

MORPHOLOGIE ÉVOLUTIONNAIRE

S. W. Emelianov (С. В. Емельянов). Heterochronie in der Anlage der Segmentalorgane, ihre Ursachen und Folgen 766

MORPHOLOGIE EXPÉRIMENTALE

G. V. Lopashov (Г. В. Лопашов). Formbildungsfelder des Mesoderms bei Amphibienkeimen 770

Edition de l'Académie des Sciences de l'URSS

Moscou 1941

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHEMATICS

SOME GENERAL PROPERTY OF DISTRIBUTION OF PRODUCTS OF PRIME NUMBERS

By I. M. VINOGRADOFF, Member of the Academy

In my papers of 1937—1940 (1) I have given a series of theorems characterizing one general property of distribution of prime numbero In the present paper I give a series of similar theorems, pertaining ts the distribution of products of prime numbers. From these theorems we may, in particular, obtain some interesting general theorems of the distribution of values of the Moebius function $\mu(n)$.

A detailed exposition of the problem will be given elsewhere.

Notations. The symbolical inequality $A \ll B$ means that $A = O(B)$. By ε we denote an arbitrary positive constant < 1. Finally, ϑ denotes a number subject to the condition $|\vartheta| \leqslant 1$.

In the sequel P will run over numbers, not divisible by a square of an integer > 1. The formulated theorems hold, however, also in the following cases:

1) P runs over numbers, possessing one and the same (arbitrary) number $h > 1$ of simple factors;

2) P runs over numbers with an even number of simple factors;

3) P runs over numbers with an odd number of simple factors.

Theorem 1. *Let* $N > 2, \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q^2}, (a, q) = 1, 0 < q < N$. *Then we have*

$$\sum_{P \leqslant N} e^{2\pi i \alpha P} \ll N^{\varepsilon} \sqrt{N^{-\frac{1}{3}} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q} + \frac{k^4}{q^2}}.$$

Theorem 2. *Let* $A > 0$, $N > 8$, $\frac{N}{2} \leqslant N_1 < N_2 \leqslant N$ *and let the function* $f(z)$ *possess in the interval* $\frac{N}{2} \leqslant z \leqslant N$ *the second and the third continuous derivatives, satisfying the conditions*

$$\frac{1}{A} \ll |f''(z)| \ll \frac{1}{A}; \quad \frac{1}{A} \ll |zf'''(z) + 2f''(z)| \ll \frac{1}{A}.$$

Then we have

$$\sum_{N_1 < P \leqslant N_2} e^{2\pi i f(P)} \ll N^{1+\varepsilon} \left(\frac{N}{A} + \frac{A}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Theorem 3. *Let* η *be a sufficiently small positive constant* < 0.01, $N \geqslant 8$, $\frac{N}{2} \leqslant N_1 < N_2 \leqslant N$, k *— a constant* $\geqslant 12$, $n = [2k + 2]$; *let, further,*

$f(z)$ be a function, possessing in the interval $\frac{N}{2} \leqslant z \leqslant N$ continuous derivatives of the orders $s = [k+2],\ [k+2]+1,\ \ldots,\ n$, satisfying the conditions

$$N^{k-s-0.01} \ll |f^{(s)}(z)| \ll N^{k-s+\eta};$$

$$N^{k-s-0.01} \ll |sf^{(s)}(z) + zf^{(s+1)}(z)| \ll N^{k-s+\eta}.$$

Then we have $\sum_{N_1 < P \leqslant N_2} e^{2\pi i f(P)} \ll N^{1-0.133\rho}, \quad \rho = \frac{1}{n^3 \log 4n}.$

Theorem 4. *Let $0 < \sigma \leqslant 1$, $N > 8$, q—an integer, $0 < q < N$. If $T(\sigma)$ denotes the number of those values of P, not exceeding N, which fall into intervals of the form*

$$cq < P \leqslant (c+\sigma)q, \quad c \text{—an integer},$$

then we have

$$T(\sigma) = \sigma T(1) + O(N^{1+\varepsilon}\Delta), \quad \Delta = \sqrt{N^{-\frac{1}{3}} + \frac{q}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Theorem 5. *Under the conditions of Theorem 4, putting $M(\sigma) = \sum \mu(n)$ where the summation is extended over all positive integers n not exceeding N and falling into intervals of the form $cq < n \leqslant (c+\sigma)q$, c—an integer, we have $M(\sigma) = \sigma M(1) + O(N^{1+\varepsilon}\Delta)$.*

Theorem 6. *Let $0 < \sigma < 1$. With the notations of Theorem 2 we have for the number $T(\sigma)$ of fractions $\{f(x)\}$ under the condition*

$$0 \leqslant \{f(x)\} < \sigma;\ T(\sigma) = \sigma T(1) + O\left(\left(\frac{N}{A} + \frac{A}{N^2}\right)^{\frac{1}{5}}\right).$$

Example. Let $f(x) = \sqrt{x}$. We have $f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$, and for the number $T(\sigma)$ of fractions $\{\sqrt{P}\}$, $N_1 < P \leqslant N_2$, we obtain

$$T(\sigma) = \sigma T(1) + O(N^{1+\varepsilon-\frac{1}{10}}).$$

Herein $T(1)$ is the number of all values of P in the interval $N_1 < P \leqslant N_2$, and $T(\sigma)$ is the number of those of them, which belong to intervals ot the form

$$c^2 \leqslant P < (c+\sigma)^2, \quad c \text{—an integer}.$$

Hence, denoting by $M(\sigma)$ the sum $M(\sigma) = \sum \mu(n)$, where n runs over integers of the interval $N_1 < P \leqslant N_2$, lying in intervals of the form $c \leqslant n < c+\sigma$, c—an integer, we shall have

$$M(\sigma) = \sigma M(1) + O(N^{1+\varepsilon-\frac{1}{10}}).$$

Stekloff Institute of Mathematics.
Academy of Sciences of the USSR.

Received
17. XII. 1940.

REFERENCES

[1] I. M. Vinogradoff, C. R. Acad. Sci. URSS, XVII, No. 4 (1937); Bull. Acad. Sci. URSS, série math. (1938); ibid., série math. (1940); Rec. Math., 7 (49), 2 (1940).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHÉMATIQUES

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE TROISIÈME ESPÈCE

Par N. GUNTHER, membre correspondant de l'Académie

1. Le but de cette Note est d'exposer un nouveau moyen d'aborder des questions liées avec les équations de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(z)\, G(x, z)\, \varphi(z)\, dz + f(x) \qquad (1)$$

où $k(x)$ est une fonction bornée, qui change le signe dans l'intervalle (a, b), et $G(x, y)$ — un noyau continu, positif et défini.

Les équations (1) ont été introduites par Hilbert (1) qui a montré le lien intime de leur théorie avec la théorie des formes quadratiques à un nombre illimité des variables dont il est l'auteur. Leur théorie a été reprise par Marty (2) et Garbe (3) qui ont suivi une voie indirecte en donnant une définition artificielle de l'orthogonalité et en partant de l'équation associée; cependant ils ont dû parfois recourir à la théorie de Hilbert. Nous traiterons dans cette Note l'équation (1) directement, n'utilisant aucunement la théorie des formes quadratiques de Hilbert.

2. Soit μ_n un nombre caractéristique de l'équation

$$\omega(x) = \mu \int_a^b G(x, y)\, \omega(y)\, dy \qquad (1)$$

et $\omega_n(x)$ la fonction fondamentale correspondante. Le noyau $G(x, y)$ étant positif et défini, les nombres μ_n sont positifs et les fonctions $\omega_n(x)$ que nous supposons normées forment une suite fermée. Suivant le théorème de Mercer, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2(x)}{\mu_n} \qquad (2)$$

converge uniformément ayant pour somme $G(x, x)$. Introduisons la fonction

$$G_{1/2}(x, y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(x)\, \omega_n(y)}{\sqrt{\mu_n}} \qquad (3)$$

donnée par la série de Fourier dont les coefficients sont égaux à $\frac{\omega_n(x)}{\sqrt{\mu_n}}$; la somme des carrés des coefficients est convergente suivant (2);

pour x (ou y) fixe, la fonction $G_{1/2}(x, y)$ comme fonction de y (ou de x) est à carré sommable; on a d'ailleurs (4):

$$G(x, y) = \int_a^b G_{1/2}(x, z)\, G_{1/2}(z, y)\, dz. \tag{4}$$

Supposons que

$$k(x, y) = \int_a^b k(z)\, G_{1/2}(x, z)\, G_{1/2}(z, y)\, dz. \tag{5}$$

La fonction (5) est continue comme fonction de x et y.

En effet, on a pour (5) le développement (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b k(z)\, G_{1/2}(x, z)\, \omega_n(z)\, dz \int_a^b G_{1/2}(y, z)\, \omega_n(z)\, dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(y)}{\sqrt{\mu_n}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_m(x)}{\sqrt{\mu_m}} \int_a^b k(z)\, \omega_n(z)\, \omega_m(z)\, dz \right\} \tag{6}$$

auquel, en dégageant le terme complémentaire, on peut donner la forme

$$\sum_{n=1}^{n=N} \left\{ \sum_{m=1}^{m=M} \right\} + \sum_{n=1}^{n=N} \left\{ \sum_{m=M}^{\infty} \right\} + \sum_{n=N}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \right\}. \tag{7}$$

Le carré du dernier terme dans (7) ne dépasse pas

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\omega_n^2(y)}{\mu_n} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b k(z)\, G_{1/2}(x, z)\, \omega_n(z)\, dz \right)^2 <$$

$$< \varepsilon K^2 \int_a^b G_{1/2}^2(x, z)\, dz = \varepsilon K^2 G(x, x) \tag{8}$$

où $K = \max |k(x)|$, si N est assez grand; le carré de la somme intérieure du second terme ne dépasse pas, si M est choisi convenablement

$$\sum_{m=M}^{\infty} \frac{\omega_m^2(x)}{\mu_m} \int_a^b k^2(z)\, \omega_n^2(z)\, dz < \varepsilon_1 K^2 \tag{9}$$

et comme $|\omega_n(y)| < A\sqrt{\mu_n}$, ce second terme est inférieur à $\sqrt{\varepsilon_1} KN$. Le noyau $k(x, y)$ est évidemment symétrique.

3. Etudions maintenant les équations

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(z)\, G(x, z)\, \varphi(z)\, dz, \quad \theta(x) = \lambda \int_a^b k(x, y)\, \theta(y)\, dy; \tag{1}$$

les équations ont les mêmes nombres caractéristiques λ_n; si $\varphi_n(x)$ et $\theta_n(x)$ sont respectivement les fonctions fondamentales correspondant à λ_n, on a

$$\left.\begin{aligned} \theta_n(x) &= \sqrt{|\lambda_n|} \int_a^b k(z)\, G_{1/2}(x, z)\, \varphi_n(z)\, dz, \\ \varphi_n(x) &= \frac{\lambda_n}{\sqrt{|\lambda_n|}} \int_a^b G_{1/2}(x, z)\, \theta_n(z)\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pour le démontrer il suffit de calculer le second membre de la première des égalités (2) en supposant que λ_n est le nombre caractéristique de la première des équations (1) correspondant à la fonction fondamentale $\varphi_n(x)$. En utilisant l'égalité

$$\int_a^b h_1(x)\left(\int_a^b G_{1/2}(x, z)\,h(z)\,dz\right)dx = \int_a^b h(z)\left(\int_a^b G_{1/2}(x, z)\,h_1(x)\,dx\right)dz \qquad (3)$$

qu'on peut vérifier par un calcul direct, on s'assure, que $\theta_n(x)$ satisfait à la seconde des équations (1) pour $\lambda = \lambda_n$; la supposition que $\theta_n(x)$ est identiquement nulle, conduit, après la multiplication de la première des égalités (2) par $G_{1/2}(y, x)$ et l'intégration, à la conclusion que $k(z)\varphi_n(z)$ est orthogonale à $G(x, z)$, ce qui est impossible.

On démontre la seconde des égalités (2) en y remplaçant $\theta_n(x)$ par sa valeur. En multipliant la première des égalités (2) par $\theta_n(x)$, en l'intégrant et en utilisant la seconde, on obtient

$$\int_a^b \theta_n^2(x)\,dx = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\int_a^b k(z)\,\varphi_n^2(z)\,dz \qquad (4)$$

d'où il suit qu'en normant $\varphi_n(x)$ on peut poser

$$\int_a^b k(z)\,\varphi_n^2(z)\,dz = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}. \qquad (5)$$

Pour un tel choix des fonctions $\varphi_n(x)$, les fonctions $\theta_n(x)$ sont normées. La suite des fonctions $\theta_n(x)$ est fermée, si l'ensemble des zéros de la fonction $k(x)$ est de mesure nulle. Si $\vartheta(x)$ est orthogonale à $k(x, y)$, en multipliant la condition de cette orthogonalité par $\omega_n(x)$ et en intégrant le produit, on trouve aisément que pour chaque n

$$\int_a^b k(x)\left[\int_a^b G_{1/2}(x, z)\,\vartheta(z)\,dz\right]\omega_n(x)\,dx = 0 \qquad (6)$$

d'où, en vertu de la supposition faite à propos de $k(x)$, on conclut que la fonction entre les crochets dans (6) est égale à zéro. En la multipliant de nouveau par $\omega_n(x)$ et en intégrant le produit, on voit que $\vartheta(x)$ est orthogonale à chaque $\omega_n(x)$, ce qui est impossible.

4. Supposons, que la fonction $h(x)$ est à carré sommable. En tenant compte de ce que la suite $\theta_n(x)$ est fermée, on trouve:

$$f(x) = \int_a^b k(y)\,G(x, y)\,h(y)\,dy = \int_a^b G_{1/2}(x, z)\times$$

$$\times\left[\int_a^b k(y)\,G_{1/2}(z, y)\,h(y)\,dy\right]dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b G_{1/2}(x, z)\,\theta_n(z)\,dz\times$$

$$\times\int_a^b \theta_n(z)\left[\int_a^b k(y)\,G_{1/2}(z, y)\,h(y)\,dy\right]dz. \qquad (1)$$

La série converge uniformément et absolument; si a_n et b_n sont les facteurs dans le terme général de la série (1), son terme complémentaire ne dépasse pas

$$\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=N}^{\infty} b_n^2} < \sqrt{\int_a^b G_{1/2}^2(x, z)\,dz}\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{G(x, x)}\sqrt{\varepsilon} \qquad (2)$$

si N est suffisamment grand. En continuant le calcul, on trouve

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{|\lambda_n|}}{\lambda_n}\varphi_n(x)\int_a^b k(y)\,h(y)\left(\int_a^b G_{1/2}(z,y)\,\theta_n(z)\,dz\right)dy=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\varphi_n(x)\int_a^b k(y)\,h(y)\,\varphi_n(y)\,dy=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\varphi_n(x)\int_a^b k(y)\,f(y)\,\varphi_n(y)\,dy. \tag{3}$$

5. Ayant démontré le théorème de Hilbert-Schmidt, on peut par les raisonnements habituels établir que la solution de l'équation (1,1) est donnée par la série

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\frac{\lambda\varphi_n(x)}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b k(y)\,f(y)\,\varphi_n(y)\,dy \tag{1}$$

qui est uniformément et absolument convergente.

En remarquant que la suite $\theta_n(x)$ est fermée, on trouve pour la fonction $f(x)$, donnée par l'égalité qui suit, une série qui converge uniformément et absolument:

$$f(x)=\int_a^b G_{1/2}(x,y)\,h(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b G_{1/2}(x,y)\,\theta_n(y)\,dy\int_a^b\theta_n(y)\,h(y)\,dy=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\varphi_n(x)\int_a^b k(z)\,f(z)\,\varphi_n(z)\,dz. \tag{2}$$

En remplaçant dans (2) $h(y)$ par $G_{1/2}(y,z)$, nous trouvons

$$G(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\varphi_n(x)\,\varphi_n(y). \tag{3}$$

En multipliant (2) par $h(x)f(x)$ et intégrant le produit, on obtient

$$\int_a^b k(x)\,f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|}{\lambda_n}\left(\int_a^b k(x)\,f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right)^2. \tag{4}$$

En posant dans (3) $y=x$, en multipliant par $k(x)$ et en intégrant le produit, nous trouvons, ayant utilisé (5, 3), la série

$$\sum_{n=1}\frac{1}{\lambda_n}=\int_a^b k(x)\,G(x,x)\,dx \tag{5}$$

qui est déduite par Garbe à l'aide de la théorie des formes quadratiques de Hilbert [5]. Les séries (4) et (5) sont absolument convergentes, car leurs sommes ne dépendent pas de l'ordre de leurs termes.

Université de Leningrad.

Manuscrit reçu
le 2. I. 1941.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. XV. [2] Marty, C. R., **150** (1910). [3] Garbe, Math. An., **76** (1914). [4] Stekloff, Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, **15**, § 8 (1903). [5] Voir [3], § 4.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHÉMATIQUES

SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GOLDBACH-VINOGRADOFF

Par C. MARDJANICHVILI

(Présenté par I. M. Vinogradoff, de l'Académie, le 30.XII.1940)

1. L'article présent contient une variante de la démonstration de la formule asymptotique pour le nombre J_N des manières différentes dont un nombre impair N peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers. A savoir, nous démontrons que

$$J_N = R(N)\,S(N) + O\left(\frac{N^2}{(\lg N)^{5-\varepsilon}}\right) \tag{1}$$

où ε est une constante > 0 arbitrairement petite,

$$S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3} \sum_{\substack{1 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} N} \tag{2}$$

$$R(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_2^N \frac{e^{2\pi i z x}}{\lg x}\, dx \right)^3 e^{-2\pi i z N}\, dz. \tag{3}$$

Comme on le sait, $S(N) > \frac{1}{2}$, $R(N) = \frac{N^2}{2\lg^3 N} + O\left(\frac{N^2 \lg\lg N}{(\lg N)^4}\right)$.

La formule (1) diffère de la formule démontrée par I. Vinogradoff (1)

$$J_N = R(N)\,S(N) + O\left(\frac{N^2 \lg\lg N}{(\lg N)^4}\right)$$

par l'évaluation un peu plus précise du reste. Le facteur $(\lg N)^5$ contenu dans le reste de la formule (1) peut être remplacé par un facteur croissant plus lentement.

2. Dans la démonstration nous appliquons les résultats de A. Page concernant le nombre des premiers dans une progression arithmétique, dont la différence croît indéfiniment.

Comme on sait (2), il existe une constante $A_1 > 0$ telle que de toutes les L-fonctions de Dirichlet construites avec des caractères primitifs de modules $q \leqslant \xi$ une fonction au plus a une racine réelle $\sigma > 1 - \frac{A_1}{\lg \xi}$. On sait aussi, que dans le cas de l'existence d'une fonction pareille elle correspond à un caractère réel non principal.

Soit $\xi = \lg^{18} N$ et $\varepsilon_1 > 0$ une constante arbitrairement petite. Désignons par q_0 le module (s'il existe) satisfaisant à la condition $(\lg N)^{2-\varepsilon_1} \leqslant q_0 \leqslant \lg^{18} N$ et tel, que la L-fonction, formée avec le caractère primitif χ_0 correspondant à ce module, a une racine réelle $\sigma_0 > 1 - \frac{A_1}{\lg \xi}$.

Alors pour un q quelconque, $q \leqslant \xi$, $(q, l) = 1$ et M, M_1 quelconques, $0 < M < M_1 < N$, le nombre $\pi(M, M_1;\ q,\ l)$ des nombres premiers p,

satisfaisant à la condition $M \leqslant p < M_1$ et appartenant à la progression $p = qt + l$, s'exprime par la formule

$$\pi(M, M_1; q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\int_M^M \frac{dx}{\lg x} + \eta(q)\chi(l) \sum_{M+1 \leqslant n \leqslant M_1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\lg n} \right) + \\ + O\left(Ne^{-A\sqrt{\lg N}}\right), \tag{4}$$

où $\eta(q) = 0$ pour $q_0 \neq q$ et $\eta(q) = 1$ pour q_0/q, $\chi(l)$ est le caractère du module q correspondant au caractère primitif $\chi_0(l)$ du module q_0, A — une constante absolue, et la constante en O ne dépend pas de q, l, N, M et M_1.

3. Posons

$$\tau = \frac{N}{\xi} = \frac{N}{\lg^{18} N}, \quad S_\alpha = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}. \tag{5}$$

Nous avons $J_N = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_\alpha^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha$. Représentons chaque α sous la forme

$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, où $(a, q) = 1$, $q \leqslant \tau$ et $|\theta| < 1$.

Considérons tous les intervalles ayant leurs centres aux points $\frac{a}{q}$ et de longueur $\frac{2}{\tau}$ pour lesquels $q \leqslant \xi$, désignons par J_{1N} la somme des intégrales de $S_\alpha^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha$ étendues à ces intervalles et posons

$$J_N = J_{1N} + J_{2N}. \tag{6}$$

Les estimations de I. M. Vinogradoff des sommes trigonométriques aux nombres premiers (1) donnent

$$J_{2N} \ll \frac{N^2}{\lg^5 N}. \tag{7}$$

4. Passons à la considération de J_{1N}. En décomposant la somme (5)

$$S_\alpha = \sum_{p<N} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) p}; \quad |z| \leqslant \frac{1}{\tau}$$

en sommes partielles de la forme $S_{\alpha M} = \sum_{M \leqslant p < M_1} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z\right) p}$ en nombre $\ll \xi^3$ et avec $0 < M_1 - M \leqslant \frac{N}{\xi^3}$, et en décomposant à leur tour $S_{\alpha M}$ en sommes partielles $S_{\alpha Ml}$ étendues aux nombres premiers appartenant à la progression $qt + l$ selon (4), nous obtenons

$$S_{\alpha Ml} = \frac{1}{\varphi(q)} e^{2\pi i \frac{a}{q} l + 2\pi i z M} \left(\int_M^{M_1} \frac{dx}{\lg x} + \chi(l)\eta(q) \sum_{M+1 \leqslant n \leqslant M_1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\lg n} \right) + \\ + O\left(\frac{N}{q(\lg N)^{90}} \right)$$

d'où

$$S_\alpha = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{1 \leqslant l < q \\ (l,q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} l} \left(\int_2^N \frac{e^{2\pi i z x}}{\lg x} dx + \chi(l)\eta(q) \sum_{2 \leqslant n \leqslant N} \frac{e^{2\pi i z n} \Lambda(n)\chi(n)}{\lg n} \right) + \\ + O(N \lg^{-36} N).$$

En posant $\quad T = \int_2^N \frac{e^{2\pi i z x}}{\lg x} dx, \quad T_1 = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i z p} \chi_0(p)$

et en remarquant que $\chi(l)=\chi_0(l)$ pour $(l,q)=1$ nous aurons

$$J_{1N}=\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\sum_{1\leqslant q\leqslant\xi}\frac{1}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{1\leqslant a<q\\(a,q)=1}}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\Big(T\mu(q)+T_1\eta(q)\sum_{\substack{1\leqslant l<q\\(l,q)=1}}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\chi_0(l)\Big)^3e^{-2\pi izN}+$$

$$+O\Big(\frac{N^2}{\lg^{20}N}\Big). \qquad (8)$$

5. Considérons la somme

$$U(q,a)=\sum_{\substack{1\leqslant l<q\\(l,q)=1}}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\chi_0(l). \qquad (9)$$

Soit $q=q_0s,(a,q)=1$. Si $(s,q_0)>1$, on a $U(q,a)=0$, et si $(s,q_0)=1$, on a $U(q,a)=\mu(s)\chi_0(s)U(q_0,a)$.

Appliquant les expressions pour les sommes de Gauss, nous trouvons

$$U(q_0,a)=\chi_0(a)h(q_0)\sqrt{q_0}$$

où $|h(q_0)|=1$ ou 0, et de cette manière

$$\sum_{\substack{1\leqslant l<q\\(l,q)=1}}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\chi_0(l)=\mu(s)\chi_0(s)\chi_0(a)h(q_0)\sqrt{q_0} \qquad (10)$$

pour $(s,q_0)=1$, d'où

$$\sum_{\substack{1\leqslant a<q\\(a,q)=1}}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\Big(\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\chi_0(l)\Big)^3=\mu(s)\chi_0(s)q_0^{3/2}h^3(q_0)U(q,aN). \qquad (11)$$

Nous avons aussi $U(q,aN)=0$ pour $(N,q_0)>1$ et $U(q,aN)=$ $=\mu(s_1)\varphi(d)\chi_0(-N)h(q)\sqrt{q_0}$ pour $(N,q_0)=1$ et $(N,s)=d$, $s=ds_1$. Ainsi

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant\xi}\frac{\eta(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{1\leqslant a<q\\(a,q)=1}}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant l<q\\(l,q)=1}}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\chi_0(l)\Big)^3\ll\frac{q_0^2}{\varphi^3(q_0)}\sum_{1\leqslant s\leqslant\frac{\xi}{q_0}}\frac{\varphi(d)}{\varphi^3(s)}\ll$$

$$\ll(\lg N)^{-2+\varepsilon_2}.$$

Estimant d'une manière analogue les autres termes de l'expression figurant sous le signe de l'intégrale dans (8) et appliquant l'estimation

$$\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T^mT_1^{3-m}\,dz\ll\frac{N^2}{(\lg N)^{3-\varepsilon_3}}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

nous trouverons que

$$J_{1N}=\sum_{1\leqslant q\leqslant\xi}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{1\leqslant a<q\\(a,q)=1}}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T^3e^{-2\pi izN}\,dz+O\Big(\frac{N^2}{(\lg N)^{5-\varepsilon}}\Big),$$

donc, en vertu de (6) nous démontrons la formule (1).

Il faut remarquer que par la méthode appliquée dans cet article on peut résoudre quelques autres problèmes additifs pour les nombres premiers.

Institut Mathématique de Stekloff.
Académie des Sciences de l'URSS.

Manuscrit reçu
le 2. I. 1941.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, X (1937).
[2] A. Page, Proc. London Math. Soc., sér. 2, **39**, 116 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHÉMATIQUES

SUR L'EXISTENCE DES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES

Par Z. SCHAPIRO

(Présenté par S. L. Soboleff, de l'Académie, le 7.XII.1940)

Le théorème d'existence des représentations quasi-conformes à caractéristiques continues a été démontré pour les domaines plans par M. A. Lavrentieff en 1935 (1). Dans la présente Note je donne une extension de ses résultats pour le cas des caractéristiques de forme plus générale.

Définition. Une représentation $w=f(z)$ du domaine D sur un domaine Δ est nommée quasi-conforme à caractéristiques

$$p_1(z,w),\ \theta_1(z,w)$$
$$p(z,w),\ \theta(z,w)$$

si cette représentation est

1) Homéomorphe.

2) Chaque petite ellipse $\mathcal{E}$ dont le centre est en un point z et dont les caractéristiques sont $p_1(z,w)$, $\theta_1(z,w)$ [c'est-à-dire le rapport des demi-axes est $p_1(z,w)$, où $w=f(z)$, et l'angle du grand axe avec OX est égal à $\theta_1(z,w)$] est transformée en une ellipse E dont le centre est en $w=f(z)$ et les caractéristiques sont $p(z,w)$, $\theta(z,w)$ aux infiniment petits d'ordre supérieur près par rapport au grand axe de E.

Le théorème général d'existence a lieu.

Quels que soient les domaines simplement connexes D et Δ qui admettent la représentation conforme sur un cercle, et quelles que soient les fonctions réelles des deux variables complexes

$$p_1(z,w)\geqslant 1,\ \theta_1(z,w)$$
$$p(z,w)\geqslant 1,\ \theta(z,w)$$

($z\subset D$, $w\subset\Delta$, p_1 et p étant continues dans les domaines fermés, θ_1 étant continue pour $p_1\neq 1$ et de même pour θ), il existe une représentation quasi-conforme de D sur Δ à caractéristiques p_1, θ_1; p, θ qui transforme 3 points frontières donnés de D en 3 points frontières de Δ.

La démonstration du théorème se divise en 3 étapes.

1. Il existe une représentation quasi-conforme $w=f(z)$ du cercle $|z|<1$ sur la bande $0<v<1$, $f(-1)=-\infty$, $f(i)=i$, $f(1)=\infty$ à caractéristiques analytiques ne dépendant que de x et y. Dans ce cas on cherche la solution sous la forme de deux fonctions analytiques réelles; $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

La partie linéaire de la représentation en chaque point

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

pourvu qu'elle ne s'annulle pas, doit transformer l'ellipse à caractéristiques p_1, θ_1 précisément en une ellipse à caractéristiques p, θ. Cette condition donne deux relations entre les 4 premières dérivées: on peut les écrire dans la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c\frac{\partial v}{\partial x} + d\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

où a, b, c, d sont des fonctions analytiques de p_1, θ_1; p, θ, donc de x, y.

En excluant de ce système $u(x, y)$, on trouve pour $v(x, y)$ une équation différentielle du 2 ordre du type elliptique, pour lequel le problème de Dirichlet est résoluble (2). En résolvant ce problème pour le cercle $|z| < 1$, en supposant que les valeurs frontières sont zéro pour la demi-circonférence inférieure et 1 pour la demi-circonférence supérieure, et en déterminant la fonction conjuguée à partir du système (1), nous aurons une fonction $f(z) = u + iv$ qui vérifie les conditions du théorème. A l'aide d'une représentation conforme auxiliaire on peut remplacer le cercle par un domaine D arbitraire.

2. Le passage des caractéristiques analytiques aux caractéristiques continues est basé sur certaines propriétés des représentations quasi-conformes établies par Lavrentieff. Etant données deux couples de caractéristiques continues $p_1(x, y) > 1$, $\theta_1(x, y)$; $p(x, y) > 1$, $\theta(x, y)$, nous construisons des suites de polynômes qui doivent les approximer $\{p_1^n\}$, $\{\theta_1^n\}$, $\{p^n\}$, $\{\theta^n\}$ et pour chaque système de quatre éléments nous déterminons la représentation quasi-conforme $w = f_n(z)$. En vertu du lemme 2 (1) la famille des fonctions $\{f_n(z)\}$ et la famille des fonctions inverses sont compactes; donc, il existe une fonction à limite $w = f(z)$, qui donne la représentation homéomorphe de D sur Δ.

La démonstration de ce que la fonction limite a des caractéristiques limites est basée sur le lemme 4 (1) et s'effectue presque de même pour les caractéristiques dépendant de z seul que pour le cas général.

En modifiant très peu les raisonnements, on peut aussi prendre en considération les points, où $p_1 = 1$ ou bien $p = 1$, et le θ correspondant n'est pas déterminé.

3. En vertu de ce qui précède, il suffit de démontrer le théorème général d'existence pour le cas, où $p_1(x, y; u, v)$, $\theta_1(x, y; u, v)$; $p(x, y; u, v)$, $\theta(x, y; u, v)$ possèdent des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre. Dans ce cas les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ doivent encore vérifier le système (1), mais ce système cesse d'être linéaire, puisque les coefficients a, b, c, d dépendent de $x, y; u, v$.

L'existence de la solution peut être démontrée par la méthode des approximations successives. Supposons que les domaines D et Δ coïncident respectivement avec les bandes $0 < y < 1$, $0 < v < 1$, ce qui n'est pas une restriction, car on peut réduire le cas général à ce cas au moyen de représentations conformes auxiliaires. Supposons d'ailleurs que p_1 et p diffèrent de 1 seulement pour $|x| < T$, $|u| < T$, où T est arbitraire, c'est-à-dire que pour les parties des bandes, dont la distance de l'origine surpasse T, la représentation est conforme. Cette restriction n'est pas essentielle, car on peut faire un passage à la limite pour $T \to \infty$, ce qui est légitime en vertu du § 2.

Considérons maintenant la famille des caractéristiques

$$p_1^\lambda = 1 + \lambda(p_1 - 1); \quad \theta_1^\lambda = \lambda\theta_1,$$
$$p^\lambda = 1 + \lambda(p - 1); \quad \theta^\lambda = \lambda\theta.$$

Si λ est assez petit, il existe pour ces caractéristiques une solution du système (1). Si dans les coefficients du système on substitue x et y au lieu des fonctions inconnues u et v, on aura un système linéaire qui, suivant le § 1, est résoluble, et dont la solution donne une représentation quasi-conforme $f_1(z) = u_1 + iv_1$ à caractéristiques

$$p_1^\lambda(x, y;\ x, y),\ \theta_1^\lambda(x, y;\ x, y)$$
$$p^\lambda(x, y;\ x, y),\ \theta^\lambda(x, y;\ x, y).$$

En continuant ce procédé, nous construirons une suite de représentations quasi-conformes d'une bande sur une bande $w = f_n(z) = u_n + iv_n$ à caractéristiques $p_1^\lambda(x, y;\ u_{n-1}(x, y),\ v_{n-1}(x, y))$ etc.

En s'appuyant sur le théorème 2 du travail précédemment cité de Schauder [2], on peut montrer que si λ est assez petit, cette suite converge et donne la représentation limite $w = f(z) = u + iv$ à caractéristiques $p_1^\lambda(x, y;\ u, v)$ etc. A l'aide de représentations auxiliaires on en déduit aussi la démonstration de ce que s'il existe une représentation quasi-conforme a caractéristiques p_1^λ, θ_1^λ; p^λ, θ^λ et si $\lambda_1 - \lambda$ est assez petit, alors il existe une représentation à caractéristiques $p_1^{\lambda_1}$, $\theta_1^{\lambda_1}$; p^{λ_1}, θ^{λ_1}.

Mais la famille étant compacte, il suit des résultats du § 2 que le passage à la limite de $\lambda < \lambda_0$ à $\lambda = \lambda_0$ est légitime.

Ainsi nous avons démontré l'existence de représentations pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire d'une représentation à caractéristiques arbitraires dépendant de z et w.

Institut de Mathématiques
Académie des Sciences de l'URSS.

Manuscrit reçu
le 9. XII. 1940.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] M. Lavrentieff, Rec. Math., **42**, No. 4. [2] Schauder, Math. ZS., **38**.

Traduit par N. Bary.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHÉMATIQUES

SUR LA POSITION CORRECTE DU PROBLÈME DE GOURSAT

Par L. MELZER

(Présenté par S. L. Soboleff, de l'Académie, le 3.XII. 1940)

Le problème de Goursat pour le système d'équations

$$\sum_{i=1}^{l+m} f_{ji}(x,y)\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{i=1}^{l+m}\varphi_{ji}(x,y)\frac{\partial u_i}{\partial y}=\Phi_j(x,y,u_1,\ldots,u_{l+m}) \qquad (1)$$
$$j=1,\ \ldots,\ l+m$$

consiste à déterminer les fonctions $u_1,\ldots,u_{l+m}$ qui vérifient ce système, et d'ailleurs l de ces fonctions prennent des valeurs données sur l'axe X, et m des valeurs données sur l'axe Y.

I. G. Petrovsky a proposé d'étudier le problème sur la position correcte du problème de Goursat. Par définition, le problème de Goursat est correctement posé pour le système (1) dans un certain domaine D situé dans le premier angle des coordonnées et dont la frontière contient un segment $[Oa]$ de l'axe X et un segment $[Ob]$ de l'axe Y, si:

A) Pour chaque système de fonctions

$$\left.\begin{array}{ll}\psi_j(x) & j=1,\ldots,l \qquad 0\leqslant x\leqslant a\\ \psi_j(y) & j=l+1,\ldots,l+m \quad 0\leqslant y\leqslant b\end{array}\right\} \qquad (2)$$

continues avec leurs dérivées jusqu'à un certain ordre L et qui ne surpassent pas en valeur absolue une certaine constante, il existe toujours un et un seul système de fonctions u_i vérifiant le système (1) dans le domaine D et prenant des valeurs données sur le segment de l'axe X et sur le segment de l'axe Y.

B) Quel que soit $\mathscr{E}>0$, on peut indiquer un nombre $\eta(\mathscr{E})>0$ tel que, si les fonctions ψ_j $(j=1,\ldots,l+m)$ et toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre L varient moins de $\eta(\mathscr{E})$, alors les fonctions u_i varient de $\mathscr{E}$ au plus.

1. Soit donné un système (1) dont les coefficients des dérivées sont constants (I), les fonctions $\Phi_j(x,y,u_1,\ldots,u_{l+m})$ sont continues et possèdent des dérivées partielles continues $\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_p}$, $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial y\,\partial u_p}$, $\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial u_p\,\partial u_b}$ (ou bien respectivement $\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\Phi_\gamma}{\partial x\,\partial u_p}$) pour $|u_j|\leqslant c$ et $(x,y)\subset G$ (le domaine G vérifie les mêmes conditions que le domaine D) (II).

Les diviseurs élémentaires de la matrice F

$$\left\|\begin{array}{llll}F(f_{11}+k\varphi_{11}) & +\varphi_{11}, & \ldots, & F(f_{1l+m}+k\varphi_{1l+m})+\varphi_{1l+m}\\ F(f_{l+m1}+k\varphi_{l+m1})+\varphi_{l+m1}, & \ldots, & F(f_{l+ml+m}+k\varphi_{l+ml+m})+\varphi_{l+ml+m}\end{array}\right\|$$

(k étant une constante arbitraire, pour laquelle le déterminant $|f_{ji}+k\varphi_{ji}|\neq 0$) sont réels et du premier degré (III). Dans ces hypothèses une transformation linéaire non singulière à coefficients constants $u_\mu = \sum_{i=1}^{l+m} b_{\mu i} v_i$ $(\mu = 1, \ldots, +lm)$ réduit le système (1) à la forme canonique $f_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - F_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} = G_\lambda (x, y v_j)$ $(\lambda = 1, \ldots, l+m)$ (pour chaque λ l'une au moins des constantes f_λ, F_λ est non nulle).

Les conditions initiales pour les fonctions inconnues v_i prennent la forme:

$$\sum_{i=1}^{l+m} b_{\lambda i} v_i (x, 0) = \psi_\lambda (x) \quad \lambda = 1, \ldots, l \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$\sum b_{\mu i} v_i (0, y) = \psi_\mu (y) \quad \mu = l+1, \ldots, l+m \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Supposons ensuite que l'axe X est au plus m fois une caractéristique, l'axe Y est une caractéristique multiple d'ordre l au plus (IV), les racines de l'équation $|Ff_{ij} + \varphi_{ij}| = 0$ sont non négatives (V) et un mineur déterminé de la matrice $\| b_{\mu i} \|$ est non nul (VI). Dans ce cas on peut pour les fonctions vérifiant le système homogène

$$f_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - F_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

et les conditions initiales (2) établir des identités qui expriment les valeurs de ces fonctions au point $(0, y)$ au moyen des valeurs initiales données et les valeurs des mêmes fonctions aux points de l'axe Y situés au-dessous de ce point. Dans la suite nous nommerons cela un «abaissement».

En particulier, dans le cas où l'axe Y n'est pas une caractéristique, les racines des équations caractéristiques sont différentes, les déterminants

$$\begin{vmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1l} \\ b_{l1}, \ldots, b_{ll} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{l+1\,l+1}, \ldots, b_{l+1\,l+m} \\ b_{l+m\,l+1}, \ldots, b_{l+m\,l+m} \end{vmatrix}$$

sont non nuls, les identités qui réalisent l'abaissement prendront la forme

$$v_\lambda (0, F_\lambda x) = \sum_{i=l+1}^{l+m} \sum_{j=1}^{l} A_{ij}^\lambda v_j (0, F_i x) +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{l+m} \sum_{j=l+1}^{l+m} B_{ij}^\lambda \psi_j (F_i x) + \sum_{j=1}^{l} C_j^\lambda \psi_j (x) \tag{4}$$

(les fonctions v_j sont supposées numérotées de telle manière que $F_\lambda > F_\mu$ si $\lambda < \mu$, $f_\lambda = 1$).

Si le système (1) vérifie les conditions [I—VI] et les séries

$$1 + \sum_i \sum_j |A_{ij}^\lambda| + \sum_i \sum_j |A_{ij}^\lambda| \sum_p \sum_r |A_{pr}^j| +$$

$$+ \sum_i \sum_j |A_{ij}^\lambda| \sum_p \sum_r |A_{pr}^j| \sum_s \sum_t |A_{st}^r| + \ldots$$

convergent (VII), alors dans un certain domaine $D \subset G$ le problème de Goursat est correctement posé, quelles que soient les données initiales continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre et ne surpassant pas en valeur absolue une certaine constante (α).

2. Dans les seconds membres de l'égalité (4) on peut remplacer les $v_j(0, F_i x)$ par leurs expressions suivant (4), c'est-à-dire effectuer encore un «abaissement». En général, pour chaque solution du problème de Goursat un nombre fini (n) «d'abaissements» donne des identités analogues à (4). Dans ces dernières entrent les valeurs des données initiales en un nombre fini de points, soit N_n; numérotons ces points et écrivons la somme contenant les données initiales dans la forme

$$S_{\lambda, n} = \sum_{j=1}^{l+m} \sum_{i=1}^{N_n} a_{ij}^{\lambda, n} \psi_j(y_i).$$

Le coefficient de la fonction ψ_j au point y_i dépend de n, car dans les «abaissements» qui suivent le n-ième peuvent encore entrer les données initiales aux points tels, que les valeurs des fonctions ψ_j en ces points se trouvaient déjà dans $S_{\lambda, n}$. Mais il existe cependant pour chacun des points un M si grand que $a_{ij}^{\lambda, M} = a_{ij}^{\lambda, M+k}$ (k est un nombre positif arbitraire). Dans la suite les $a_{ij}^{\lambda, M}$ seront nommés coefficients stabilisés et désignés par a_{ij}^{λ}.

Si le système (1) vérifie les conditions (I — VI) et si d'ailleurs

$$2) \quad \sum_{j=1}^{l+m} \sum_{i=1}^{N_n} |a_{ij}^{\lambda, n}| < P \qquad (\mathrm{VIII_I})$$

pour tous les n, où P est une certaine constante,

$$3) \quad \Phi_j(0, 0, 0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, l+m) \qquad (\mathrm{VIII})$$

et si enfin, 4) nous ne considérerons que les données initiales qui vérifient (α) et pour lesquelles $\psi_j(0) = \psi_j'(0) = 0$ (β), alors en un certain domaine $D \subset G$ il existe toujours une et une seule solution du problème de Goursat qui dépend d'une manière continue des données initiales.

Pour le système (1) dont les seconds membres ne dépendent pas des fonctions cherchées, le problème de Goursat est correctement posé même sans faire les hypothèses (VIII) et (β).

3. Si le système vérifie les conditions (I — VI) et la condition que les seconds membres du système soient pour $v_\lambda = 0$ des infiniment petits d'ordre déterminé au voisinage de l'origine des coordonnées, alors, en faisant quelques hypothèses supplémentaires sur l'ordre de grandeur des données initiales et des solutions au voisinage de l'origine, on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

D'autre part, on peut indiquer certaines conditions nécessaires pour la position correcte du problème de Goursat.

4. Si le système (1) vérifie les conditions (I — VI) et ses seconds membres sont nuls, mais l'une au moins des séries $\sum_{j=1}^{l+m} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}^{\lambda}|$ diverge, les a_{ij}^{λ} étant les coefficients stabilisés, alors même si la solution du problème de Goursat existe, elle ne peut être une fonction continue des données initiales dans le sens précédemment indiqué.

5. Si le système (1) vérifie les conditions (I — IV), (VI), mais l'une au moins des racines de l'équation $|Ff_{ij} + \varphi_{ij}| = 0$ est négative, alors le problème de Goursat ne peut posséder une solution unique.

6. Si le système (1) vérifie les conditions I et II, les diviseurs élémentaires F de la matrice $\| F(f_{ij} + k\varphi_{ij}) + \varphi_{ij} \|$ sont réels, mais ne sont pas tous du premier degré, alors pour savoir si la position du problème de Goursat est correcte, il ne suffit pas de considérer les coefficients des dérivées.

7. Si le système (1) vérifie les conditions I, II, les seconds membres ne dépendent pas des fonctions cherchées, mais l'une au moins des racines de l'équation $|F(f_{ij}+k\varphi_{ij})+\varphi_{ij}|=0$ est complexe, alors le problème de Goursat n'est pas correctement posé.

Enfin considérons des systèmes dont les coefficients des dérivées sont des fonctions de x et y. Soit donc donné un système d'équations (1) tel que les coefficients des dérivées dans le domaine G sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x et y (I).

Les fonctions Φ_γ satisfont à la condition (II). L'un au moins des déterminants $|f_{j_i}(x,y)|$, $|\varphi_{j_i}(x,y)$ est non nul dans le domaine D (III). Pour fixer les idées supposons que $|f_{j_i}(x,y)|\neq 0$. Les diviseurs élémentaires de la matrice $F\ \|Ff_{j_i}(x,y)+\varphi_{j_i}(x,y)\|$ sont du premier degré (IV). Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et leur multiplicité ne dépend pas de $(x,y)\subset G$ (V).

Les caractéristiques $y=\varphi_\lambda(x,x_0,y_0)$, $(x_0,y_0)\subset G$ $(\lambda=1,\ldots,l)$ atteignent la frontière du domaine G au point $(x,0)\subset G$, et les courbes $y=\varphi_\mu(x,x_0,y_0)$, $(x_0,y_0)\subset G$, $\mu=l+1,\ldots,l+m$ au point $(0,y)\subset G$ (nous supposons que les racines sont numérotées de telle manière que $F_\lambda(x,y)\geqslant F_\mu(x,y)$, si $\lambda<\mu$) et l'on a au plus pour m valeurs de l'égalité λ $\varphi_\lambda(0,x,0)=0$, $(x,0)\subset G$ (VI).

Les mineurs de la matrice

$$\left\|\begin{array}{ccc} b_{l+11}(0,y), & \ldots, & b_{l+1l+m}(0,y) \\ b_{l+m1}(0,y), & \ldots, & b_{l+ml+m}(0,y) \end{array}\right\|$$

considérés quand on établit une identité analogue à (4), sont ou bien non nuls pour tous les $(0,y)\subset G$ ou bien ils sont identiquement nuls.

Un mineur déterminé de la matrice

$$\left\|\begin{array}{ccc} b_{11}(x,0), & \ldots, & b_{1l+m}(x,0) \\ b_{l1}(x,0), & \ldots, & b_{ll+m}(x,0) \end{array}\right\|$$

diffère de zéro pour tous les $(x,0)\subset D$ (VII). Les séries

$$1+\sum_i\sum_j[|A_{ij}^\lambda(0)|+qd_{iq}^\lambda]+\sum_i\sum_j[|A_{ij}^\lambda(0)|+qd_{ij}^\lambda]\times$$
$$\times\sum_p\sum_r[|A_{pr}^j(0)|+q^2d_{pr}^j]+\sum_i\sum_j[|A_{ij}^\lambda(0)|+qd_{ij}^\lambda]\times$$
$$\times\sum_p\sum_r[|A_{pr}^j(0)|+q^2d_{pr}^j]\sum_s\sum_t[|A_{st}^r(0)|+q^3d_{st}^r]+\ldots$$

convergent (VIII), q étant une constante positive inférieure à 1, les d_{ij}^λ — des constantes respectivement égales à 0 ou à 1. Dans ces hypothèses il existe un certain domaine $D\subset G$, où le problème de Goursat est correctement posé quelles que soient les données initiales, pourvu qu'elles soient continues ainsi que leurs premières dérivées et ne surpassent pas une certaine constante en valeur absolue.

Si le système vérifie les conditions (I — VII) et la condition que les seconds membres du système soient des infiniment petits d'ordre déterminé pour $v_\lambda=0$ au voisinage de l'origine, alors en faisant quelques hypothèses supplémentaires sur les données initiales et les solutions (concernant aussi leur ordre de grandeur) on démontre que la solution du problème de Goursat existe et est unique.

Manuscrit reçu
le 4. XII. 1940.

Traduit par N. Bary.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

MATHÉMATIQUES

SUR LA MÉTHODE DE SOMMATION DE S. BERNSTEIN ET W. ROGOSINSKY

Par PHILIPPE KHARCHILADZE

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 19.XII.1940)

S. Bernstein a proposé (1) une méthode de sommation de la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\}. \tag{1}$$

Cette méthode consiste à envisager l'expression

$$\tilde{S}_n(x)=\frac{1}{2}\left\{S_n\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)+S_n\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\} \tag{2}$$

où l'on a posé

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\}. \tag{3}$$

La série (1) étant la série de Fourier de la fonction sommable $f(x)$, en tous les points de continuité on aura, d'après S. Bernstein, l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n(x)=f(x). \tag{4}$$

I. Natanson, en s'appuyant sur le théorème général de la théorie des intégrales singulières, a démontré que l'égalité (4) a lieu en tous les points x, où la condition suivante est remplie

$$\int_0^h|\varphi_x(t)|\,dt=o(h) \tag{a}$$

où

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

On démontrera sans peine que la méthode de S. Bernstein est applicable à chaque série (non seulement aux séries trigonométriques). En effet, désignons par $A_k(x)$ la somme $A_k(x)=a_k\cos kx+b_k\sin kx$ pour $k\geqslant 1$ et $A_0(x)=\frac{a_0}{2}$. En s'appuyant sur les égalités (2) et (3), nous obtenons

$$\tilde{S}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}A_k(x).$$

Soit maintenant

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{5}$$

une série quelconque: au lieu de la suite des sommes partielles S_n de cette dernière, nous pouvons considérer la suite des nombres définis suivant la formule

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1} a_k \tag{6}$$

La suite (6) ayant une limite définie quand $n \to \infty$, nous dirons que la série (5) est sommable par la méthode (B, 1).

La méthode (B, 1) est une certaine méthode linéaire permanente de Toeplitz. *On peut montrer que celle-ci est plus forte que la méthode de moyennes arithmétiques de Cesaro* (C, 1) *. C'est pourquoi toutes les propositions sur la convergence ordinaire des moyennes de Cesaro restent vraies pour la suite (2). Le théorème de S. Bernstein et celui de I. Natanson sont une conséquence des résultats respectifs de Fejer et Lebesgue pour les moyennes de Cesaro. Les théorèmes cités sont susceptibles de quelques précisions qui suivent des propriétés des moyennes de Cesaro. En particulier, *l'égalité* (4) *est vraie en tous les points x où les conditions suivantes ont lieu:*

$$\int_0^h |\varphi_x(t)|\, dt = O(h) \tag{b}$$

et

$$\int_0^h \varphi_x(t)\, dt = o(h). \tag{c}$$

Soient $\{\lambda_n\}$ une suite arbitraire satisfaisant à la condition $\lambda_n = 0\left(\frac{1}{n}\right)$, et $f(x)$ une fonction sommable; en tous les points x où la condition (a) est remplie, on a l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n(x+\lambda_n) = f(x).$$

La suite du type (2) peut aussi être formée pour les polynômes trigonométriques interpolaires. Soit $U_n(f, x)$ un polynôme interpolaire défini par les égalités

$$U_n(f, x_i) = f(x_i)$$
$$x_i = \frac{2\pi}{2n+1} i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$$

où $f(x)$ est une certaine fonction périodique de période 2π. Considérons les polynômes trigonométriques définis par la formule

$$\tilde{U}_n(f, x) = \frac{1}{2}\left\{U_n\left(f, x - \frac{\pi}{2n+1}\right) + U_n\left(f, x + \frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}.$$

---

* C'est-à-dire: la série (5) étant sommable par la méthode (C, 1) vers un nombre S, elle est aussi sommable (B, 1) vers S. La série $\sum_0^\infty (-1)^k k$ est sommable par la méthode (B, 1) vers $-\frac{1}{4}$, tandis qu'elle n'est pas sommable (C, 1).

Dans mon travail «Sur l'interpolation trigonométrique» j'ai démontré que, $f(x)$ étant une fonction absolument continue satisfaisant à la condition $f(0)=f(2\pi)=0$, nous aurons presque partout l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{U}'_n(f,x)=f'(x).$$

On peut montrer que $U'_n(f,x)$ *converge fortement vers* $f'(x)$ *dans l'espace des fonctions sommables, c'est-à-dire qu'on a l'égalité*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\tilde{U}'_n(f,x)-f'(x)|\,dx=0.$$

I. Natanson a montré que la méthode de S. Bernstein est applicable aussi à la théorie des intégrales de Fourier. Au lieu de

$$S_\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt$$

il examine l'expression

$$\tilde{S}_\lambda(x)=\frac{1}{2}\left\{S_\lambda\left(x-\frac{\pi}{2\lambda}\right)+S_\lambda\left(x+\frac{\pi}{2\lambda}\right)\right\}$$

et démontre que, si $f\in L(-\infty,\infty)$ et au point x la condition (a) est remplie, on a en ce point l'égalité

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{S}_\lambda(x)=f(x). \qquad (4')$$

L'égalité (4') *est vraie même dans le cas où les conditions* (b) *et* (c) *sont remplies au point* x.

D'ailleurs, I. Natanson dans son travail évalue la différence $\tilde{S}_\lambda(x)-f(x)$ en supposant que $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre $\alpha\,(0<\alpha<1)$, à savoir

$$|\tilde{S}_\lambda(x)-f(x)|=O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right).$$

Cette évaluation reste aussi vraie pour $\alpha=1$. Ainsi on a la réponse à la question que I. Natanson a posé dans son travail cité ci-dessus.

On peut définir une autre méthode de sommation que nous appelons méthode (B, 2). Convenons de dire que la série est sommable par la méthode (B, 2) si la suite

$$\tilde{S}_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\cdot a_k \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

possède une limite définie. Cette limite étant égale à S, nous écrirons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k=S. \qquad (B,2)$$

La méthode (B, 2) est une méthode permanente de Toeplitz.

On a les théorèmes suivants: *La série* (5) *étant sommable par la méthode* (C, 2) *vers un nombre* S, *elle est aussi sommable* (B, 2) *vers* S.

Si (1) *est la série de Fourier de la fonction* $F(x)$ *et s'il existe*

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,(b_k\cos kx-a_k\sin kx)$$

est sommable par la méthode (B, 2) *vers* $F'(x)$.

(1) *étant la série de Fourier d'une fonction sommable* $f(x)$, *en tous les points où* $f(x)$ *est la dérivée de son intégrale indéfinie, on aura l'égalité*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x). \qquad (B, 2)\ *$$

Si $l = f(x+0) - f(x-0)$ *existe et est fini, la suite*

$$nb_n(x) = n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

est sommable par la méthode (B, 2) *vers le nombre* $\frac{l}{\pi}$.

Revenons aux polynômes interpolatoires. Représentons $U_n(f, x)$ dans la forme

$$U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx.$$

Considérons

$$U_{n,i}(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{i} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx$$

$$U_{n,0}(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} \quad \text{et} \quad V_{n,\nu}(x) = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu} U_{n,i}(f, x).$$

On a les propositions suivantes.

Si la fonction $f(x)$ *est continue et s'il existe* $f'(x)$ *finie en un point* x, *alors*

$$\lim_{k\to\infty} W'_{n,k}(x) = f'(x) \quad (n \geqslant k)$$

où

$$W_{n,k}(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} V_{n,k}(x).$$

Les conditions du théorème précédent étant remplies

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{U}_n^{(2)\prime}(x) = f'(x)$$

où

$$\tilde{U}_n^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{U}_n\left(f, x - \frac{\pi}{2n+1}\right) + \tilde{U}_n\left(f, x + \frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}.$$

Les démonstrations des propositions mentionnées seront données dans un autre recueil.

Institut de Mathématiques.
Université de Leningrad.

Manuscrit reçu
le 27. XII. 1940.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] S. Bernstein, C. R., **191** (1930). [2] И. П. Натансон, Тр. Ленингр. инд. ин-та, No. 4, 39 (1937). [3] Ph. Kharchiladze, Rec. Math., 8 (50), 3 (1940). [4] I. Natanson, ibid., **7** (49), 2 (1940).

* Jacob dans une lettre à I. Natanson a énoncé la justesse d'un théorème ne différant pas en somme du théorème énoncé. J'ai appris ce fait avant d'avoir trouvé sa démonstration.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PHYSICS

ON THE β-RAY SPECTRA OF Mn^{56}, Dy^{165} AND Au^{198}

By B. S. DŽELEPOW and A. A. KONSTANTINOV

(Communicated by A. F. Joffe, Member of the Academy, 19.XII. 1940)

In 1936 Alichanow, Alichanian and Dželepow (1) investigated along with β-spectra of other elements, the β-spectrum of Mn^{56}. In these experiments radiomanganese was obtained by bombarding Mn with neutrons produced by the reaction Be+Em. Because of the relatively weak intensities of the neutron sources at hand, these authors investigated the β-ray spectrum only in very general outline.

In a number of papers published later, the β-spectrum of Mn^{56} was investigated by means of a cloud-chamber. Several authors (2, 3), comparing the β-spectrum of Mn^{56} with the predictions of Konopinsky-Uhlenbeck's theory, came to the conclusion that the β-spectrum is a complex one. This point of view has been supported by the discovery of γ-rays (4) with energies corresponding to the difference between the upper limits of the components of the complex β-spectrum. However, data obtained by other authors (5) failed to confirm the complex character of the β-spectrum of Mn^{56}; thus, the complex character of the β-spectrum of Mn^{56} was open to question. This problem is of particular interest, since until presently only one complex β-spectrum of a light element (Cl^{38}) (6) has been thoroughly examined. Therefore we undertook the present investigation with an improved apparatus and a stronger source of Mn^{56} available at the Cyclotron Laboratory of the Radium Institute of the Academy of Sciences of the USSR.

The investigation was carried out by means of a magnetic spectrometer described earlier in a paper by Alichanow, Alichanian and Dželepow (7). The counter and the spectrometer were separated by a 4.4 μ nitro-cellulose film. The air pressure in the spectrometer did not exceed 1 mm Hg. In order to check the apparatus, the β-ray spectrum of RaE was examined and compared with β-spectra obtained by Alichanow, Alichanian and Dželepow (7) and by Alichanian and Zavelsky (8) under particularly pure conditions. Within the energy interval 150—1200 ekV the curves do not differ by more than 4%. Special controlling experiments have shown the absence of scattering in the apparatus.

Radioactive manganese was obtained by irradiating kalium permanganate with slow neutrons and separated from it in the usual manner (1). A thin layer of MnO_2 containing Mn^{56} was brought on a 10 μ aluminium strip. In our computations we made use of the value 2.59±0.02 hour (9) for the half-life of Mn^{56}. For the experimental points lying within the region 45—

300 ekV there was introduced a correction for the absorption of electrons in the film of the counter and in the source. Fig. 1 shows the β-spectra of Mn^{56} obtained with sources containing 4.7 and 2.9 mg/cm². This spectra differ only at energies smaller than 150 ekV, where the spectrum corresponding to the thinner source is more authentic.

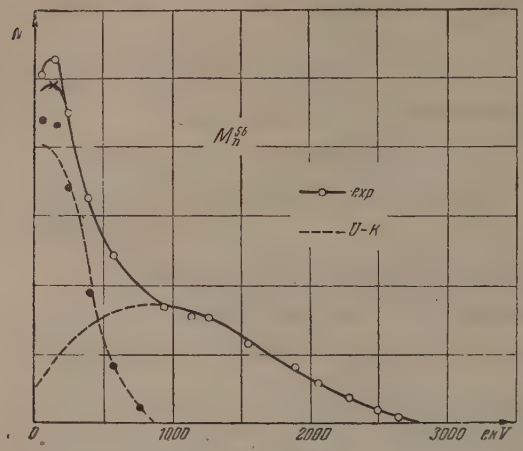


Fig. 1.

The complexity of the β-spectrum of Mn^{56} is quite distinctly observed in Fig. 1. To resolve the β-spectrum into two components, the method of Kurie, Richardson and Paxton ([10]) was used. Although Konopinsky-Uhlenbeck's formula should now be considered only a semiempirical one, its excellent agreement with experiment throughout the energy region, except the vicinity of the upper limit, fully justifies its application to the analysis of complex β-spectra.

Fig. 2 shows Konopinsky-Uhlenbeck's plot for the complex spectra and for the soft component. Solid dots on the curve for the soft component are obtained by subtracting from the experimental curve of the complex spectrum the part which corresponds, according to the Konopinsky-Uhlenbeck formula, to the hard component. The experimental end points of the spectra are 800 and 2800 ekV, respectively.

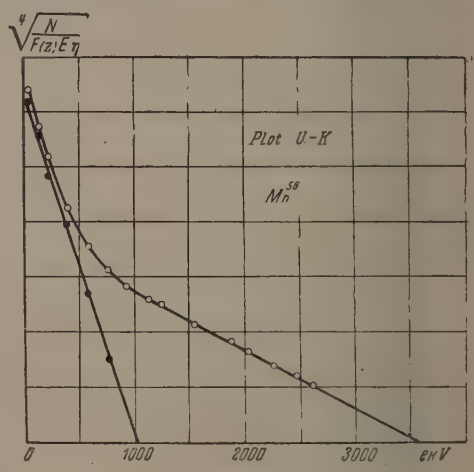


Fig. 2.

The energy of the upper limit of the hard spectrum can be obtained with an accuracy of no more than 3%, i. e. ± 100 ekV.

As earlier experiments by Alichanow, Alichanian and Dzelepow ([1]) had given a higher value of the upper limit of β-spectrum of Mn^{56} (3200 ekV), we compared the curves of the β-spectra near the upper limit, obtained by means of our apparatus from Mn^{56} and RaC preparations of equal intensity. This comparison has shown the high point energy of electrons emitted by Mn^{56} to be by 350±50 ekV lower than that of RaC. As, according to Alichanian and Nikitin ([11]), the energy of the upper limit of RaC is equal to 3175 ekV, the value of the energy of the upper limit is found to coincide with those given above. The upper limit of the soft component can be determined with an accuracy of ±100 ekV only.

The ratio of intensities of the two components can be found by comparing the area of the dotted curves in Fig. 1. The intensity of the hard spectrum is 1.6 that of the soft one.

The β-spectra of Au^{198} and Dy^{165} have been already investigated by several authors ([1], [5], [12], [13], [14]). In all cases sources having a considerable thickness were used, which brought about serious distortions in the shape of the β-spectrum; and besides, only the upper limit could be determined. Using the cyclotron as a source of neutrons, we were able to operate with much thinner sources (14.7 mg/cm² Dy_2O_3 and 20 mg/cm² Au). Figs. 3 and 4 represent the β-spectra of Au^{198} and Dy^{165}, respectively. In contrast to Mn^{56}, Au^{198} and Dy^{165} have simple β-spectra. The dotted curve in Figs. 3 and 4 represent the spectra obtained from Konopinsky-Uhlenbeck's formula by Kurie-Richardson-Paxton's method; they agree quite satisfactorily with experimental data. The discrepancy within the low energy range scarcely deserves any attention, the rôle of the corrections due to the thickness of the source being here quite a considerable one. Experimental end points of the β-spectra of Au^{198} and Dy^{165}

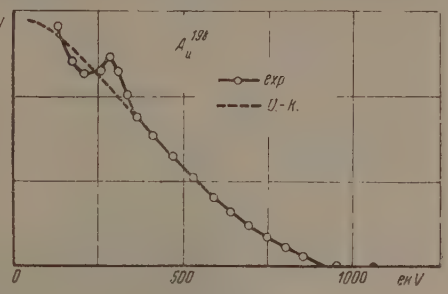


Fig. 3.

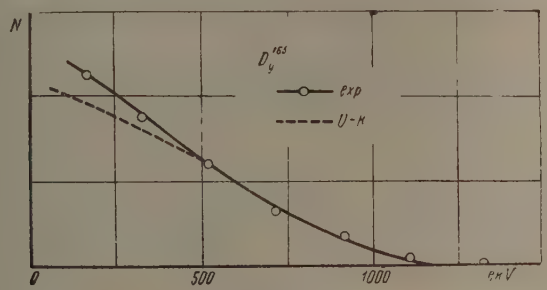


Fig. 4.

are 850±30 ekV and 1180±40 ekV, respectively. The continuous β-spectrum of Au^{198} shows a maximum near 300 ekV, which is probably due to the internal conversion electron of γ-rays of Au^{198}. The energy of the γ-rays is 395 ekV.

Physical-Technical Institute.
State University. Leningrad.

Received
8. I. 1941.

REFERENCES

[1] Алиханов, Алиханьян и Джеленов, ЖЭТФ, **6**, 615 (1936). [2] Brown and Mitchell, Phys. Rev., **50**, 593 (1936). [3] Bacon, Grisewood and Van der Merve, ibid., **52**, 668 (1937). [4] Mitchell and Ganger, ibid., **52**, 137 (1937). [5] Gaerttner, Surin and Crane, ibid., **49**, 793 (1936). [6] Watase, Ihah, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **18**, 21, 626 (1939). [7] Alichanian, Alichanow and Dželepow, Sow. Phys., **11**, 204 (1937). [8] Alichanian and Zavelsky, C. R. Acad. Sci. URSS, XVII, 463 (1937). [9] Livingood and Seaborg, Phys. Rev., **54**, 391 (1938). [10] Kurie, Richardson and Paxton, ibid., **49**, 366 (1936). [11] Alichanian and Nikitin, C. R. Acad. Sci. URSS, XXI, 29 (1938). [12] Libby and Lee, Phys. Rev., **55**, 245 (1939). [13] Richardson, ibid., **55**, 609 (1939). [14] Naidu and Siday, Proc. Phys. Soc., London, **48**, 332 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PHYSICS

SPONTANEOUS DIVISION IN THORIUM

By I. S. PANASJUK and G. N. FLEROV

(Communicated by A. F. Joffe, Member of the Academy, 17.I.1941)

Petrzhak and Flerov (1) have shown that uranium nuclei spontaneously divide with a half-life of $T \approx 4 \times 10^{16}$ years. For the spontaneous division of thorium nuclei these authors report $T > 10^{18}$, as the lower boundary of half-life by fission. We undertook a further, more detailed investigation of this problem by means of a large ionization chamber having a total active surface of the electrodes equal to 5000 cm^2; 28 g ThO_2 were spread over the 15 electrodes of the chamber. The large size of the latter and the difficulties connected herewith (an unusually great capacity of the system, a large number of α-particles) made it desirable to effect some comparative measurements with uranium, the nature of spontaneous nuclear division in which had previously been investigated. Therefore parallel experiments were carried out with a ionizing chamber of the same dimensions as that with thorium. The only difference was that this time the electrodes were coated with 9 g U_3O_8. Both chambers were filled with argon at a pressure of about 500 mm Hg. The electrodes were 6 mm apart; the potential difference applied was 270 V.

By means of the apparatus described in the article cited above, we took a differential curve of distribution for the values of non-linearly intensified impulses produced by the fragments of thorium when the chamber was bombarded with neutrons from a (Rn + Be) source. A similar curve was plotted for the case when no source of spontaneous impulses was present. Analogous experiments were carried out with the uranium chamber. Fig. 1 shows the results of measurements for the latter; those obtained with the help of the thorium chamber are given in Fig. 2.

Curves *a* show the distribution of impulses produced by fragments in the course of neutron bombardment according to their size; curves *b* reproduce the distribution according to size of the spontaneous impulses recorded without a neutron source. The distribution of spontaneous impulses in the Th chamber (34 impulses within 9 hours) sharply differs from that for the fragment impulses recorded after the bombardment of the same chamber with neutrons. It is only natural to ascribe those 34 impulses, crowded at the beginning of the curve, to the ionization produced by α-particles that have simultaneously penetrated into the chamber. We believe therefore that they cannot possibly be associated with the spontaneous division of thorium. The absence in the thorium chamber of large spontaneous impulses, as well

as the evaluation of the sensitivity of the method, permit to maintain that the half-life of spontaneous division of thorium must exceed 10^{19} years.

The distribution of spontaneous impulses in the uranium chamber according to size (250 within 8.5 hours) is analogous to the distribution according

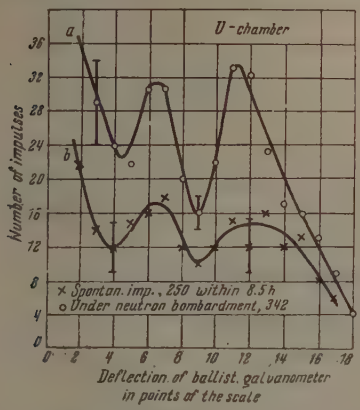


Fig. 1.

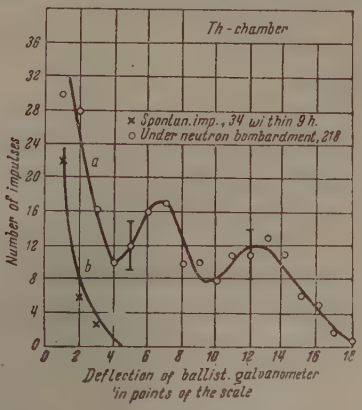


Fig. 2.

to size of the impulses produced by uranium fission under neutron bombardment.

The similarity of the two curves should be taken to mean that the fragments produced by spontaneous division cannot essentially differ as to their charge and initial energy from those formed by uranium fission under neutron bombardment.

Thus, from the data obtained, the half-life by spontaneous fission for uranium can be approximately evaluated as being 5×10^{16} years, which is in full agreement with the value previously obtained by Petrzhak and Flerov.

While testing the uranium chamber, a series of experiments have been made under argon pressure of 700, 450 and 250 mm Hg. In all cases we measured the number of large spontaneous impulses and that of impulses produced by neutrons from a (Rn+Be) source, the correction for the intensity drop of the latter being taken into account. As may be seen from Fig. 3, the variation of pressure in the chamber has a similar effect upon the sensitivity of the apparatus to both kinds of impulses.

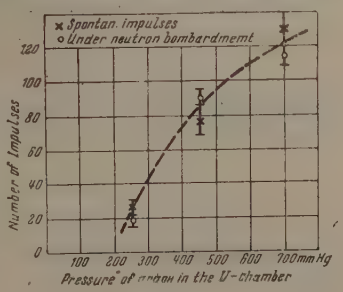


Fig. 3.

Thanks are due to Prof. I. V. Kurchatov for having directed this work, and to L. Ponomarev, who has kindly placed at our disposal a new insulating material for the ionization chambers.

Physical-Technical Institute.
Leningrad.

Received
20. I. 1941.

REFERENCES

[1] Petrzhak and Flerov, C. R. Acad. Sci. URSS, XXVIII, No. 6 (1940); ЖЭТФ, X, 9/10, 1013 (1940); Jrnl. of Phys., 2 (1940).

Translated by T. Rogalina.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PHYSICS

MECHANISM OF NUCLEAR FISSION

By V. BERESTETZKY and A. MIGDAL

(Communicated by A. F. Joffe, Member of the Academy, 28.XI. 1940)

The fundamental assumption on which Bohr and Willer[1] base their quantitative theory of nuclear fission is as follows. The dividing nuclei have charge and mass values, Z and A, near the limit of stability. Therefore the maximum of potential energy (the top of the barrier) would already be attained at small vibrations, and the height of the barrier may be given by the expansion with respect to a parameter, which characterizes the stability of the nucleus $(1-x)$, where $x=\frac{Z^2/A}{(Z^2/A)}$ lim. However, this assumption holds neither for uranium $(x=0.76)$ nor its neighbour in the periodic table.

In fact, in the case of slight deviations from the state of equilibrium, the variation of potential energy, according to Bohr and Willer, is

$$\Delta E=\frac{1}{2}a(1-x)\alpha_2^2+\frac{1}{3}(b-cx)\alpha_2^3 \qquad (1)$$

where α_2 is the coefficient of the second spherical function in the expansion of the nucleus surface. From (1) ΔE has its maximum at

$$\alpha_{2m}=\frac{a}{c-b}\cdot\frac{1-x}{1-\frac{c}{c-b}(1-x)}. \qquad (2)$$

If the term containing $(1-x)$ in the denominator of (2) is assumed to be smaller than unity, we obtain the Bohr and Willer equation for the height of the barrier E_f. As (in conformity with the values given by Bohr and Willer)

$$\frac{c}{c-b}=\frac{32}{3} \qquad (3)$$

for the expansion of (2) with respect to $(1-x)$ the following condition is necessary

$$1-x\ll\frac{3}{32}=0.09 \qquad (4)$$

which does not take place in real nuclei.

It is evident that eq. (1) cannot be used unless eq. (2) is developed with respect to $(1-x)$, since the vibrations cannot be considered small, if the maximum lies within the region of large α_2; even if account is

taken of the higher terms in the expansion with respect to α_n, the fact remains unchanged.

If consistently applied to the problem of spontaneous fission, Bohr and Willer's theory proves inadequate, since into the equation of the lifetime of the nucleus

$$\tau \sim \frac{1}{\omega} e^{\frac{2}{\hbar}\int P_{\alpha_2} d\alpha_2} \tag{5}$$

it is necessary to introduce

$$P_{\alpha_2} = \sqrt{2\frac{A}{\omega}\Delta E}$$

where ω is the frequency of natural vibrations, while ΔE has the form (1)

$$\Delta E = \frac{1}{2} A\alpha_2^2 + \frac{1}{3} B\alpha_2^3.$$

The integration in (5) should be carried out between the points $\alpha_2 = 0$ and $\alpha_2 = \frac{3}{2}\frac{B}{A}$, determinable from the condition $\Delta E = 0$. In this case, the exponent (5) will be expressed only by E_f and ω:

$$\int P_{\alpha_2} d\alpha_2 = \frac{18}{5}\frac{E_f}{\omega}. \tag{6}$$

On the assumption of

$$E_f \sim 6\,\text{Mev}, \quad \hbar\omega \sim 0.8\,\text{Mev}$$

(which is also in accordance with the Bohr and Willer theory) this will give

$$\tau \sim 10^3 \text{ sec.} \tag{7}$$

which is in evident contradiction with experiment.

Thus, the excitation of the nucleus, resulting in its fission, is essentially due to great disturbances. It is therefore impossible to calculate the shape of the potential barrier and the more so to establish the dependence of the fission cross-section on energy.

We express our thanks to Prof. L. Landau for discussions on this problem.

Physical-Technical Institute. Leningrad.
Institute of Physical Problems. Moscow.
Academy of Sciences of the USSR.

Received
6. XII. 1940

REFERENCES

[1] Bohr and Willer, Phys. Rev., **56**, 426 (1939).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PHYSICS

THE NUCLEAR SCATTERING CROSS-SECTIONS (σ_{sc}) FOR HEAVY ELEMENTS WITH PHOTONEUTRONS OF ABOUT 800 keV

By T. A. GOLOBORODKO and A. I. LEIPUNSKI, Member of the Ukrainian Academy

The present work is a continuation of our three previous studies carried out at the laboratory of the Kharkov Physical-Technical Institute with photoneutrons from (RaTh—D) and (RaTh—Be) ([1-3]). The results of these, as well as of the preceding experiments, leave no doubt, that the absolute values of σ_{sc} with monochromatic neutrons of 0.1—1.0 Mev, vary from element to element in the region of light elements from H to Ca, and in the region of heavier elements from Mn to Bi, without showing any regular dependence on the atomic weight (numbers) of the elements.

The technique of the experiments was the same as in the previous studies. All the scatterers were pure elements. The distance from the source of photoneutrons (RaTh placed at the centre of a hollow brass ball 2.5 cm radius, filled with beryllium powder) to the dysprosium detector placed at the centre of a paraffin sphere 6 cm radius, was 24 cm. The distance between the scatterer and the centre of the source was 8 to 9 cm; σ_{sc} was calculated by the formula

$$\sigma_{sc} = \frac{1}{N\delta} \ln \frac{1 - \alpha}{\frac{a}{b} - \alpha} \qquad (1)$$

derived in a previous publication ([2, 3]). Here N is the number of atoms per a cubic centimeter of the scatterer; α, the factor expressing the influence of the geometry of the arrangement; δ, the thickness of the scatterer; a and b, the respective numbers of readings of the counter with and without scatterer. At these distances the geometrical factor

$$\alpha = \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi\omega_0} * \qquad (2)$$

changes σ_{sc} by no more than 15% of its value in the case of a parallel neutron beam. The results are given in Table 1.

Table 1

Element	σ_{sc}	Element	σ_{sc}
Mn	4.3 ± 0.7	Sn	4.9 ± 0.5
Fe	3.1 ± 0.4	Sb	4.3 ± 0.6
Co	4.5 ± 0.5	Te	5.3 ± 0.6
Ni	3.4 ± 0.7	I	7.8 ± 0.9
Cu	2.5 ± 0.4	W	6.8 ± 0.9
Zn	2.8 ± 0.3	Hg	6.4 ± 0.5
As	5.8 ± 0.7	Tl	6.7 ± 1.2
Se	4.8 ± 0.8	Pb	5.1 ± 0.6
Br	7.3 ± 1.0	Bi	5.4 ± 0.7
Mo	7.9 ± 1.4		

In a recent work of Amaldi and others ([4]) σ_{sc} was measured for 39 elements with neutrons produced by the reaction

$$_6C^{12} + {}_1H^2 \rightarrow {}_7N^{13} + {}_0n^1. \qquad (3)$$

* ω_1, ω_2 and ω_0 are the solid angles subtended by the scatterers at the centre of the source, by the paraffin sphere at the centre of the scatterers and by the paraffin sphere at the centre of the source, respectively.

As stated by these authors, the energy of the neutrons was of the order of 100 to 200 keV. This energy is very near that of the photoneutrons from (RaTh—D) we have worked with, so that the two sets of values of σ_{sc} should coincide within the statistical error.

In Table 2 are given all the σ_{sc} measured with photoneutrons of (RaTh—D) and (RaTh—Be) and for comparison those found with (Rn—Be) photoneutrons ([5], [6]) and Amaldi's data with neutrons from (C—D). As seen from the table, the scattering cross-sections for (RaTh—D) photoneutrons and for (C—D) neutrons do coincide within errors for the majority of the elements, while H, B, C, F, Si, P, K, Mn, Co, As and I show large discrepancies, the absolute values of all σ_{sc}, except for P and I, being smaller than those of 200 keV photoneutrons.

Table 2

Element	$\sigma_{sc} \times 10^{+24}$ cm^{-2}			
	Photoneutrons			Neutrons
	(Rn — Be)	(RaTh — D)	(RaTh — Be)	(C — D)
1 H	—	5.0 ± 1.0	2.8 ± 0.8	3.3
3 Li	1.0 ± 0.3	2.2 ± 0.4	2.3 ± 0.5	2.0
4 Be	2.9 ± 0.5	2.8 ± 0.2	1.7 ± 0.2	2.6
5 B	3.8 ± 0.5	4.2 ± 0.5	2.9 ± 0.3	2.1
6 C	1.5 ± 0.3	4.7 ± 0.5	3.3 ± 0.4	2.1
7 N	1.6 ± 0.3	—	—	2.1
8 O	1.8 ± 0.4	3.0 ± 1.0	2.2 ± 1.0	2.1
9 F	6.3 ± 1.6	6.4 ± 1.3	3.9 ± 1.0	2.7
11 Na	3.5 ± 0.8	3.2 ± 0.6	3.3 ± 0.7	3.4
12 Mg	8.4 ± 2.8	3.9 ± 0.4	3.6 ± 0.4	3.3
13 Al	4.0 ± 0.4	3.8 ± 0.4	3.1 ± 0.4	3.7
14 Si	1.4 ± 0.7	7.2 ± 0.9	4.4 ± 0.6	3.2
15 P	—	2.4 ± 0.4	1.8 ± 0.7	4.4
16 S	1.0 ± 0.3	2.3 ± 0.4	2.5 ± 0.4	2.6
17 Cl	3.5 ± 2.1	3.8 ± 1.6	4.6 ± 1.6	2.7
19 K	—	7.4 ± 1.4	4.3 ± 1.0	3.8
20 Ca	—	4.1 ± 1.1	5.2 ± 0.9	4.9
25 Mn	—	6.9 ± 0.7	4.3 ± 0.7	4.9
26 Fe	2.7 ± 0.5	3.6 ± 0.3	3.1 ± 0.4	3.7
27 Co	—	5.7 ± 0.6	4.5 ± 0.5	5.2
28 Ni	—	6.8 ± 0.6	3.4 ± 0.7	6.6
29 Cu	4.2 ± 0.7	4.8 ± 1.0	2.5 ± 0.4	3.6
30 Zn	4.0 ± 0.7	4.0 ± 0.4	2.8 ± 0.3	3.6
33 As	—	6.3 ± 0.5	5.8 ± 0.7	4.7
34 Se	—	5.5 ± 0.5	4.8 ± 0.8	4.5
35 Br	—	7.8 ± 0.8	7.3 ± 1.0	6.6
42 Mo	—	9.6 ± 1.2	7.9 ± 1.4	—
50 Sn	5.2 ± 1.1	4.9 ± 0.6	4.9 ± 0.5	5.2
51 Sb	—	5.8 ± 0.7	4.3 ± 0.6	5.4
52 Te	—	5.7 ± 0.9	5.3 ± 0.6	—
53 I	—	4.7 ± 0.8	7.8 ± 0.9	6.6
74 W	—	9.0 ± 0.7	6.8 ± 0.9	—
80 Hg	—	7.8 ± 0.6	6.4 ± 0.5	6.8
81 Tl	—	6.7 ± 1.2	6.7 ± 1.2	—
82 Pb	7.3 ± 1.4	6.2 ± 0.7	5.1 ± 0.6	7.2
83 Bi	—	8.4 ± 0.8	5.4 ± 0.7	7.7

This systematic disagreement can hardly be accounted for by the errors of the measurements. The same table shows that the values of σ_{sc} which diverge from those of 200 keV photoneutrons, agree much better with the data for photoneutrons with the energy of about 800 keV. This fact, as well as the large divergence of the σ_{sc} of hydrogen from other experimental values and from the theoretical one, found by Amaldi and others ([4]), suggest that the neutron spectrum in their research was not what they believed it to be.

Ukrainian Physical-Technical Institute.
Institute of Mechanical Engineering. Kharkov.

Received
28. IV. 1940.

REFERENCES

[1] T. Goloborodko and A. Leipunski, Phys. Rev., **56**, 891 (1939). [2] T. Goloborodko and A. Leipunski, C. R. Acad. Sci. URSS, XXV, No. 7 (1939). [3] T. Goloborodko and A. Leipunski, ibid., XXVI. 41 (1939). [4] E. Amaldi, D. Bocciarelli, F. Rasetti and G. C. Trabacchi, Phys. Rev., **56**, 881 (1939). [5] A. Leipunski and others, Sow. Phys., **10**, 751 (1936). [6] Fedorov and Perphyljeva, ibid., **11**, 660 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

GEOPHYSIK

BESTIMMUNG DES KOEFFIZIENTEN DER TURBULENTEN ZÄHIGKEIT FÜR BEWEGUNGEN IN DER ATMOSPHÄRE

Von M. E. SCHWETZ

(Vorgelegt von N. E. Kotchin, Mitglied der Akademie, den 22. XI. 1940)

Man unterscheidet in der Atmosphäre einen thermischen und einen dynamischen turbulenten Austausch. Der erstere ist hauptsächlich an die Erwärmung der unterschichtenden Oberfläche gebunden, wobei die Temperatur sich in der Höhenrichtung verteilt und die Schwerkraft ihre Wirkung ausübt. Der dynamische Austausch ist meistens durch horizontale Strömung bedingt und hängt somit von deren Art ab. Wirken beide Ursachen, so ergibt sich ein summarischer Austausch; es wird aber dabei diejenige Form des turbulenten Austausches vorwiegen, welche im gegebenen Falle durch den stärker entwickelten—thermischen oder aber dynamischen—Faktor hervorgerufen ist.

Beobachtungen haben gezeigt, dass bei nicht allzu geringer Geschwindigkeit (mehr als 2 m/sec.) der dynamische den thermischen um ein Vielfaches überwiegt. Die vorliegende Untersuchung erstreckt sich ausschliesslich auf den dynamischen Austausch. Wir gehen dabei von folgenden Gleichungen aus:

1) Von den Gleichungen der stationären Bewegung für die turbulente Atmosphäre:

$$\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u\rho}{\partial z}+2\omega\sin\varphi v\rho=\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial v\rho}{\partial z}-2\omega\sin\varphi u\rho=\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1}$$

$$-g\rho=\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2}$$

2) Von dem Prandtl'schen halb-empirischen Verhältnis:

$$\lim_{z\to 0}\frac{|\rho w|}{\frac{\sqrt{\tau_0\rho_0}}{k}\ln\frac{z}{z_0}}=1. \tag{3}$$

3) Von der Formel für die Intensität der Reibung an der Wand:

$$\tau_0=\lim_{z\to 0}\nu\left|\frac{\partial\rho w}{\partial z}\right|. \tag{4}$$

Den hier verwendeten Bezeichnungen kommt folgende Bedeutung zu: $w=u-iv$, die komplexe Geschwindigkeit; ν, der kinematische Koeffizient der turbulenten Zähigkeit; ω, die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung; φ, die geographische Breite des Orts; p, der Druck; ρ, die Dichte; τ_0, die Reibungsintensität; k, eine Konstante, deren Grösse sich, laut Versuchsresultaten, innerhalb der Grenzen 0.35—0.40 bewegt; z_0, die relative

Rauheit. Wie Beobachtungen an rauhen Oberflächen gezeigt haben, ist $z_0 = \frac{\varepsilon}{30}$, wo ε den Grad der Rauheit angibt.

Wir führen nunmehr die komplexe Funktion

$$M = \rho u - i\rho v + \frac{1}{2\omega \sin\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (5)$$

ein und nehmen an, dass $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial p}{\partial y}$ nicht von z abhängen; dann erhalten wir anstatt des Systems (1) die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial M}{\partial z} + 2i\omega \sin\varphi M = 0. \quad (6)$$

Mit dem Anwachsen von z sinkt die Schubspannung τ; an der äusseren Oberfläche der Grenzschicht wird sie praktisch gleich Null. Es ist daher folgerichtig die Grenzbedingung

$$M(\infty) = 0 \quad (7)$$

zu stellen. Die Bedingung für ein Haften der Luft in der Höhe $z = z_0$ ergibt eine zweite Grenzbedingung:

$$M(z_0) = \frac{1}{2\omega_z}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \rho_0 U. \quad (8)$$

Wir richten die Achse ox nach der Isobare und die Achse oy nach dem Druckgradienten; im folgenden werden wir die Geschwindigkeit der freien Strömung U als eine reelle und positive Grösse annehmen.

Die Gleichung (6) enthält den kinematischen Koeffizienten der turbulenten Zähigkeit ν. Seine Abhängigkeit von dem hydrodynamischen Elemente der Bewegung ist bis heute noch nicht genügend erforscht, obgleich eine grosse Anzahl von Untersuchungen vorliegt.

Die jüngsten Untersuchungen auf diesem Gebiet sagen mit Gewissheit über den Koeffizienten des turbulenten Austausches nur folgendes aus: a) er ist stets von weit höherer Ordnung, als der Koeffizient des molekularen Austausches, ausgenommen den Fall, wo die unterschichtende Oberfläche in unmittelbarer Nähe liegt; b) er ändert sich in weiten Grenzen in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit; c) er wächst mit der Entfernung von der unterschichtenden Oberfläche bis zu einer gewissen Grösse an und fällt weiter allmählig ab.

Nehmen wir an, dass ν sich mit der Höhe gemäss folgender Formel ändert*

$$\nu = \nu_\infty(1 - e^{-mz}),$$

wo ν_∞ die turbulente Zähigkeit an der Oberfläche der Grenzschicht bedeutet und m—eine Grösse, welche in gewissem Masse die Höhe dieser Schicht kennzeichnet, so erhalten wir die Gleichung:

$$\nu_\infty\frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - e^{mz})\frac{\partial M}{\partial z}\right] + 2i\omega \sin\varphi M = 0. \quad (6')$$

Setzen wir nun eine neue unabhängige Veränderliche ein:

$$x = 1 - e^{mz}, \qquad z = \frac{\ln(1-x)}{m}.$$

Den Punkten $z = 0$ und $z = +\infty$ entsprechen dann gesondert die Werte $x = 0$ und $x = -\infty$. Nach dem Einsetzen dieser neuen Veränderlichen erhalten wir die hypergeometrische Gleichung

$$x(1-x)\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (1-x)\frac{\partial M}{\partial x} - i\delta^2 M = 0 \quad \left(\delta^2 = \frac{2\omega \sin\varphi}{\nu_\infty m^2}\right). \quad (9)$$

* Diese Form für ν ist zuerst von Prof. B. Iswekow vorgeschlagen worden.

Die Auflösung, bei welcher sich für $|x|<1$ ein Nullwert bei $-\infty$ ergibt, hat folgende Gestalt:

$$M=(E_1+iE_2)\left\{\Phi_2-\left[\ln(-x)+\frac{2\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\frac{1}{a}+2\gamma\right]\Phi_1\right\} \tag{10}$$

wo Γ das Funktionsgamma, γ — die Euler'sche Konstante und $a=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\delta$ ist.

$$\Phi_1=\left(1+\frac{\delta^4}{(2!)^2}x^2-\frac{5\delta^4}{(3!)^2}x^3+\ \dots\right)+i\delta^2x\left(1+\frac{x}{4}+\frac{4-\delta^4}{36}x^2+\ \dots\right)$$

$$\Phi_2=-2\delta^4x^2\left(\frac{3}{8}+\frac{37}{864}x+\ \dots\right)+i2\delta^2x\left(1+\frac{x}{8}+\frac{\delta-11\delta^4}{864}x^2+\dots\right)$$

und für $|x|>1$:

$$M=(E_1+iE_2)\left(-\frac{1}{x}\right)^a F\left(a,\ a,\ 2a+1,\ \frac{1}{x}\right)$$

wo

$$F\left(a,\ a,\ 2a+1,\ \frac{1}{x}\right)=1+\frac{a^2}{2a+1}\frac{1}{x}+\frac{a^2(a+1)^2}{(2a+1)(2a+2)\,2!}\frac{1}{x^2}+\dots$$

Da aber

$$\frac{2\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\frac{1}{a}+2\gamma=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}\delta}+\sqrt{2}\delta\zeta(2)-\sqrt{2}\delta^3\zeta(4)+\ \dots\right\}+$$

$$+i\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}\delta}-\sqrt{2}\delta\zeta(2)+2\delta^2\zeta(3)\ \dots\right\}\approx-\frac{1}{a}$$

(ζ — Riemann's Funktion), so schreiben wir anstatt der Gleichung (10):

$$M=(E_1+iE_2)\left\{\left[\frac{1}{a}-\ln(-x)\right]\Phi_1(x)+\Phi_2(x)\right\}\ . \tag{10'}$$

Für das Weitere ist es vorteilhaft einen Parameter α einzuführen, welcher dem Winkel zwischen der Windrichtung und der Isobare gleich ist:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v(0)}{u(0)}=-\frac{E_2}{E_1}.$$

Die Prandtl'sche Beziehung (3) gibt uns:

$$\sqrt{\tau_0\rho_0}=k|E| \tag{11}$$

und der Ausdruck (4):

$$\tau_0=\nu_\infty m|E|. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergeben sich:

$$\tau_0=\frac{\nu_\infty^2 m^2\rho_0}{k^2} \tag{13}$$

und

$$|E|=\frac{\nu_\infty m\rho_0}{k^2}\ ; \tag{14}$$

daraus

$$E_1=\frac{\nu_\infty m\rho_0}{k^2}\cos\alpha,\qquad E_2=-\frac{\nu_\infty m\rho_0}{k^2}\sin\alpha.$$

Die Bedeutung (8) für ein Haften der Luft in der Höhe $z=z_0$, oder $x=x_0$, ergibt, nach Ausscheidung des reellen und des imaginären Teils, folgende zwei Beziehungen:

$$2k^2U\sqrt{\omega\sin\varphi}\sin\alpha=\nu_\infty\sqrt{\nu_\infty m^2};\qquad -x_0=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2\delta}(\operatorname{ctg}\alpha-1)}.$$

Da aber $-x_0=e^{mz_0}-1\approx mz_0$, so nimmt die zweite Gleichung (14) folgende Gestalt an: $mz_0=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2\delta}(\operatorname{ctg}\alpha-1)}$.

$\varphi°$	z_0	α	U	$\sqrt{\nu_\infty}$	$\frac{\sqrt{\nu_\infty}}{U}$	m	mU	U	$\sqrt{\nu_\infty}$	$\frac{\sqrt{\nu_\infty}}{U}$	m	mU	U	$\sqrt{\nu_\infty}$	$\frac{\sqrt{\nu_\infty}}{U}$	m	mU
43°	0.01	15°	20 m.	5.18	0.26	9.18×10^{-3}	0.184	15 m.	3.98	0.27	1.18×10^{-2}	0.177	10 m.	2.84	0.28	1.59×10^{-2}	0.159
		20°	20 »	3.27	0.16	2.09×10^{-2}	0.418	15 »	2.57	0.17	2.59×10^{-2}	0.388	10 »	1.84	0.18	3.50×10^{-2}	0.350
		30°	20 »	1.28	0.064	1.04×10^{-1}	2.08	15 »	1.02	0.068	1.23×10^{-1}	1.850	10 »	0.74	0.07	1.66×10^{-1}	1.660
	0.05	15°	20 m.	6.70	0.34	6.24×10^{-3}	0.125	15 m.	5.35	0.36	7.62×10^{-3}	0.114	10 m.	3.88	0.39	1.04×10^{-2}	0.104
		20°	20 »	4.40	0.22	1.30×10^{-2}	0.260	15 »	3.51	0.23	1.64×10^{-2}	0.246	10 »	2.52	0.25	2.18×10^{-2}	0.218
		30°	20 »	1.81	0.09	0.62×10^{-1}	1.240	15 »	1.45	0.10	0.74×10^{-1}	1.110	10 »	1.06	0.11	0.96×10^{-1}	0.960
	0.10	15°	20 m.	7.76	0.39	5.02×10^{-3}	0.100	15 m.	5.96	0.40	6.40×10^{-3}	0.096	10 m.	4.35	0.43	8.43×10^{-3}	0.084
		20°	20 »	5.04	0.25	1.09×10^{-2}	0.218	15 »	4.02	0.27	1.33×10^{-2}	0.200	10 »	2.77	0.28	1.89×10^{-2}	0.189
		30°	20 »	2.12	0.11	0.48×10^{-1}	0.960	15 »	1.71	0.12	0.58×10^{-1}	0.870	10 »	1.25	0.12	7.56×10^{-2}	0.756
17°	0.01	15°	20 m.	6.50	0.32	5.50×10^{-3}	0.110	15 m.	5.03	0.33	6.94×10^{-3}	0.105	10 m.	3.60	0.36	9.72×10^{-3}	0.097
		20°	20 »	4.10	0.20	1.26×10^{-2}	0.252	15 »	3.23	0.21	1.56×10^{-2}	0.234	10 »	2.32	0.23	2.09×10^{-2}	0,209
		30°	20 »	1.57	0.078	6.38×10^{-2}	1.280	15 »	1.25	0.082	7.80×10^{-2}	1.170	10 »	0.92	0.092	1.00×10^{-1}	1.000
	0.05	15°	20 m.	8.35	0.42	3.78×10^{-3}	0.076	15 m.	6.61	0.44	4.66×10^{-3}	0.070	10 m.	4.72	0,47	6.28×10^{-3}	0.063
		20°	20 »	5.88	0.29	8.16×10^{-3}	0.163	15 »	4.69	0.31	1.00×10^{-2}	0.150	10 »	3.58	0.36	1.26×10^{-2}	0.126
		30°	20 »	2.23	0.11	3.88×10^{-2}	0.776	15 »	1.75	0.12	4.74×10^{-2}	0.711	10 »	1.27	0.127	6.24×10^{-2}	0.625
	0.10	15°	20 m.	9.44	0.47	3.14×10^{-3}	0.063	15 m.	7.44	0.50	3.86×10^{-3}	0.058	10 m.	5.36	0.54	5.21×10^{-3}	0.052
		20°	20 »	7.16	0.36	6.32×10^{-3}	0.126	15 »	5.53	0.37	8.23×10^{-3}	0.123	10 »	3.86	0,39	1.09×10^{-2}	0.109
		30°	20 »	2.54	1.127	3.12×10^{-2}	0.624	15 »	2.04	0.135	3.95×10^{-2}	0.592	10 »	1.50	0.15	4.83×10^{-2}	0.483

Es ist vorteilhaft zwei neue Parameter einzuführen: A, bestimmbar auf Grund von Beobachtungen an der Erdoberfläche

$$A = \frac{\sqrt{2} z_0 \omega \sin\psi \sin^2\alpha}{k^2 U \sin^3(45° - \alpha)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\delta}(\operatorname{ctg}\alpha - 1).$$

λ und A sind dann durch die Gleichung $A = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}$ miteinander verbunden, und m, sowie $\sqrt{\nu_\infty}$, ergeben sich aus den Formeln

$$\sqrt{\nu_\infty} = \frac{z_0\sqrt{2\omega \sin\varphi \sin\alpha}}{A\lambda^2 \sin(45° - \alpha)}; \quad m = \frac{A\lambda^3}{z_0}. \tag{15}$$

Wir haben für einige Parameterwerte den kinematischen Koeffizient der turbulenten Zähigkeit (im System Tonne-m-sec.) berechnet und dabei die Konstante $k = 0.4$ gesetzt (s. Tabelle).

Auf Grund der Ähnlichkeitstheorie lässt sich feststellen, dass ν_∞ und τ_0 dem Quadrate der Geschwindigkeit der freien Strömung proportionell sind und m umgekehrt proportionell ihrer ersten Potenz ist.

Zum Beweis wollen wir zwei Strömungen untersuchen. Wir bezeichnen durch x, z, p, ρ, U und ν die auf die erste Strömung und durch x', z', p', ρ', U' and ν' die auf die zweite Strömung bezüglichen Grossenwerte. Es mögen sich beide Strömungen voneinander durch ihre vertikalen l_z und horizontalen l_x Ausmasse unterscheiden. Wir schreiben nun folgende Beziehungen:

$$\frac{x'}{x} = \frac{l'_x}{l_x} = C_x; \quad \frac{z'}{z} = \frac{l'_z}{l_z} = C_z; \quad \frac{p'}{p} = C_p; \quad \frac{\rho'}{\rho} = C_\rho; \quad \frac{U'}{U} = C_U; \quad \frac{\nu'_1}{\nu} = C_\nu. \tag{16}$$

Bilden wir nunmehr die Gleichungen (1) und (2) für die zweite Bewegung, so erhalten wir auf Grund der obigen Gleichungen:

$$\frac{C_\nu C_U C_\rho}{C_z^2} \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial M}{\partial z} + C_U C_\rho 2\omega \sin\varphi i M = \frac{C_p}{C_x} \frac{\partial p}{\partial x} \quad [M = \rho(u + iv)]$$

$$\frac{C_p}{C_z} \frac{\partial p}{\partial z} = -C_\rho g \rho.$$

Damit die erstere Strömung stattfinde, muss aber (bei unveränderten ω und g)

$$\frac{C_U C_\nu C_\rho}{C_z^2} = C_U C_\rho = \frac{C_p}{C_x}; \quad \frac{C_p}{C_z} = C_\rho$$

sein; daraus ergibt sich $C_\nu = C_z^2$, $C_U C_x = C_z$.

Setzt man die Werte für die Konstanten C aus der Gleichung (3) ein, so ergeben sich die Bedingungen: $\frac{\nu}{l_z^2} = \text{const}$, $\frac{U l_x}{l_z} = \text{const}$.

Für Bewegungen mit gleichen horizontalen Ausmassen $l'_x = l_x$ haben wir: l_z ist proportionell U; ν — der Grösse U^2; die Schubspannung $\tau_0 = \nu \frac{\partial M}{\partial z}$ ist proportionell ρU^2.

Geophysikalisches Observatorium.
Leningrad.

Eingegangen
den 22. XI. 1940.

Übersetzt von A. Thal.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

BIOPHYSICS

ON CERTAIN PHYSICAL FEATURES OF FISHES OF THE BLACK SEA

By I. I. STAS

(Communicated by P. P. Lasareff, Member of the Academy, 4.I. 1941)

In his attempts to gain a deeper insight into the knowledge of the sea, the oceanographer is necessarily confronted, among other subjects, with the problem of interaction between those organisms which excel in their adaptation to the aquatic mode of life and the medium.

By means of a series of special experiments we have determined for a number of species of fish the elements similar to those which are being studied in shipbuilding—the floatage of the fish (its mean specific gravity), the coefficient of the fullness of the transverse middle-section, the coefficient of the fullness of size and the correlation of the body of the fish* to its height, in order to ascertain the relation between the clearance-gauge and the shape, and consequently the nautical properties of the fish.

The mean density of the fish δ has been determined either by means of a metallic pycnometer or in a simple graded cylinder, the method depending on the size of the fish. It should be noted, however, that the specific gravity of the living fish is a little less than that of the dead one. The data given below refer to dead fish without gas but with the swimming bladder.

The coefficient of fullness of the transverse middle-section β has been determined according to the formula

$$\beta = \frac{S}{ab} \qquad (1)$$

where S is the area of the middle cross-section of the fish body; a, its height; b, its thickness.

The coefficient of the longitudinal fullness of the size β_1 is determined according to the formula

$$\beta_1 = \frac{M}{\delta SL} \qquad (2)$$

where M is the mass of the fish body; δ, the density of it; L, the length of it. If we substitute for S in formula (2) its expression for γ, β and β_1, we obtain:

$$\gamma = \frac{M}{\delta abL}. \qquad (3)$$

γ represents a more general and convenient coefficient of the fullness of displacement, which permits to do without the knowledge of the area of

* The length of the body was calculated to the tail fin.

the middle cross-section of the fish, and in shipbuilding — the area of the loadline or the area of the middle frame.

Table 1 gives the mean values of δ, β, β_1, $\frac{L}{a}$ and γ for a number of species of Black Sea fish, from the swiftest to those lying on the bottom.

Table 1.

	δ	β	β_1	L/a	γ
Scomber scombrus	1.07	0.83	0.67	5.93	0.56
Trachurus Trachurus	1.05	0.82	0.65	4.66	0.53
Mugil chelo	1.07	0.84	0.60	4.58	0.50
Smaris chryselis	1.05	0.82	0.61	3.88	0.50
Serranus scriba	1.06	0.8	0.60	3.47	0.48
Sciaena umbra	1.05	0.8	0.58	3.29	0.46
Crenilabrus tinca	1.05	0.83	0.54	3.20	0.45
Crenilabrus ocellatus	1.04	0.83	0.54	3.06	0.45
Scorpaena scrofa	1.08	0.80	0.60	2.86	0.48
Mullus barbatus	1.05	0.89	0.60	4.24	0.53
Trachinus draco	1.07	0.84	0.60	5.38	0.50
Trigla lucerna	1.05	0.83	0.52	5.49	0.43
Gadus euxinus	1.05	0.82	0.64	5.6	0.52
Squalus accanthias	1.04	0.77	0.6	9.63	0.46
Blennius gattorugine	1.06	0.84	0.70	3.63	0.59
Uranoscapus scaber	1.07	0.89	0.74	4.0	0.66
Ophidium barbatum	1.05	0.84	0.60	7.17	0.50
Acipenser stellatus	1.05	0.79	0.70	11.38	0.55
Solea nasuta	1.07	0.86	0.80	2.81	0.69

It is to be mentioned that the coefficient of the fullness of displacement for different classes of ships and submarines also lies within the same limits, as shown in Table 2 [1].

In shipbuilding, especially for submarines, it is desirable to increase γ without increasing the total resistance of the ship. In this respect the figures obtained for swift fish (Table 1) testify to an exceptional perfection of shape — it is better stream-lined than that of any ship and approaches at the same time the big values of γ.

Table 2

Classes of ship	γ
Transport and merchant ships	0.75
Dreadnoughts	0.65
Armoured cruisers	0.55
Light cruisers	0.50
Destroyers	0.48
Submarines	0.45—0.65

As to the floatage of fish, the value of which is given in Table 1, for the living fish this value may amount to nought and even for some species change the positive sign for the negative one.

The degree of accuracy in the determination of the values necessary for the calculation of the coefficients given in Table 1 does not exceed the constant microvariations of the density and the cross-section of the fish body, which depend upon different gas vacuoles (with the exception of the swimming-bladder), upon the fullness of the stomach (in some species of fish the middle cross-section passes through the stomach), etc.

Black Sea Hydrophysical Station.
Academy of Sciences of the USSR.
Simeiz, Katsiveli.

Received.
4. I. 1941.

REFERENCES

[1] S. Yakovlev, The Theory of the Ship.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

CHEMISTRY

ISOMERIZATION OF CYCLOHEXENE AND HEPTENE-1 IN THE PRESENCE OF OXIDES OF METALS

By J. A. ARBUSOV and N. D. ZELINSKY, Member of the Academy

Some time ago we have demonstrated (1) that in the presence of alumina and silica gel at 400—450° C cyclohexene undergoes isomerization into methylcyclopentene, and that under similar conditions 1-methylcyclohexene-3 is isomerized into dimethylcyclopentene. Further, we have found (2) that *p*-menthene-3 in the presence of silica gel at 375—450° C also undergoes isomerization with the formation of a mixture of cyclopentene hydrocarbons of the formula $C_{10}H_{18}$.

After this discovery we considered it interesting to study the behaviour of cyclohexene when brought into contact with oxides of other metals. Besides alumina, silica gel and chromic oxide, investigated in that respect previously, the following oxides were investigated by us: titanium dioxide, beryllium oxide, thorium dioxide, zirconium dioxide, vanadium trioxide and manganese monoxide. Beryllium oxide, just as alumina and silica gel, calls forth the isomerization of cyclohexene into methylcyclopentene. Titanium dioxide acts in two directions: it isomerizes cyclohexene into methylcyclopentene and dehydrogenates it into benzene. All the other oxides investigated called forth a more or less intensive dehydrogenation of cyclohexene into benzene.

We were interested as well in the behaviour of unsaturated hydrocarbons with an open chain in the presence of those oxides of metals that called forth the isomerization of unsaturated six-member cycles. We investigated heptene-1 and convinced ourselves that this hydrocarbon in the presence of beryllium oxide at 450° C underwent a considerable isomerization presumably with the formation of 3-methylhexene-2, which after reduction yielded 3-methylhexane, b. p. 92° C.

Titanium Dioxide and Cyclohexene. Pure titanium dioxide was used. The inner diameter of the reaction tube was 15 mm; the length of the titanium dioxide layer was 50 cm. The original cyclohexene had the following constants: b. p. 82—83°/759 mm, $n_D^{19} = 1.4478$.

Experiment 1. Cyclohexene (24.0 g) was passed over titanium dioxide at 350° C at a rate of 5 g per hour. The condensate obtained (22.2 g) was subjected to fractional distillation over metallic sodium:

1)	75 — 80°C.	16.8 g	$n_D^{15} = 1.4445$
2)	80 — 83°C.	3.3 g	$n_D^{15} = 1.4471$

Fractions 75—80° and 80—83° were united and again brought into contact with titanium dioxide under the same conditions. The condensate (17.5 g) was distilled over metallic sodium:

b. p. 74 — 80° C, 14.5 g, $n_D^{14} = 1.4385$

Fraction 74—80° was of an unsaturated character. It was subjected to hydrogenation over platinized charcoal at 150°. The condensate of quite a saturated character (14.0 g) had $n_D^{20} = 1.4219$.

After the dehydrogenation of this product over platinized charcoal in an atmosphere of carbon dioxide at 300° a dehydrogenation condensate (12.1 g) was obtained, having $n_D^{15} = 1.4515$. In order to eliminate benzene, the condensate was treated with fuming sulphuric acid containing 5% of SO_3, washed, dried and distilled over metallic sodium. 4.6 g of methylcyclopentane were obtained, having the following properties: b. p. 70.5—72.0°/759 mm, $n_D^{20} = 1.4089$.

Experiment 2. Cyclohexene (20.1 g) was passed over titanium dioxide at 400° C at a rate of 5 g per hour. The condensate (17.8 g) was distilled over metallic sodium:

1) 73—80°C. . . . . 14.6 g $n_D^{15} = 1.4420$
2) Residue

Fraction 73—80° C was hydrogenated at 150° C in the presence of platinized charcoal; 14.0 g of a hydrogenated product were obtained, having $n_D^{15} = 1.4227$. The latter was dehydrogenated in an atmosphere of carbon dioxide in the presence of the same contact at 300° C; 11.9 g of a dehydrogenation condensate were obtained, having $n_D^{15} = 1.4574$. This condensate was treated with fuming sulphuric acid, washed, dried and distilled over metallic sodium. Methylcyclopentane (3.7 g) was obtained, with b. p. 70.5—72.0°/759 mm and $n_D^{20} = 1.4092$.

Experiment 3. 23.4 g of cyclohexene were brought into contact with titanium oxide at 450° C and at the same rate as in the former experiments. From the condensate (21.3 g) the following fraction was isolated: b. p. 72—80°, 18.9 g, $n_D^{14} = 1.4615$.

Fraction 72—80° C was passed in a current of hydrogen over platinized charcoal at 150° C. The hydrogenated condensate (18.0 g) had $n_D^{15} = 1.4251$. After dehydrogenation over platinized charcoal at 300° C a product was obtained (14.7 g) with $n_D^{15} = 1.4768$, which was treated with fuming sulphuric acid, and the remaining methylcyclopentane (2.6 g) had the following constants: b. p. 70.5—72.0°/759 mm, $n_D^{20} = 1.4085$.

Methylcyclopentane obtained in the three experiments was united and once more distilled over metallic sodium:

b. p. 70.5 — 72.0°/759 mm; $n_D^{20} = \underline{1.4089}$;

$d_4^{20} = \underline{0.7434}$;

$MR = 27.96$; calculated for C_6H_{12} $MR = 27.71$

Thus, having started from cyclohexene, by means of contact transformations, we have obtained methylcyclopentane, formed through the hydrogenation in the presence of platinum of methylcyclopentene, the latter being the direct product of the isomerization of cyclohexene by titanium dioxide.

As it may be seen from the data given above, the reaction of the isomerization of cyclohexene with titanium dioxide was accompanied with the reaction of its dehydrogenation into benzene, the latter proceeding most energetically at 450° C.

Beryllium Oxide and Cyclohexene. The beryllium oxide used was obtained through heating to 450° of pure beryllium hydro-

xide. The inner diameter of the reaction tube was 15 mm, the length of the beryllium oxide layer was 25 cm. Cyclohexene was obtained through the dehydration of cyclohexanol in the presence of alumina at 350° C and had the following properties: b. p. 81—82°/730 mm; $n_D^{20}=1.4472$.

Cyclohexene (25.5 g) was brought into contact with beryllium oxide at 450°C at a rate of 5 g per hour. The condensate (24.4 g) was distilled over metallic sodium: b. p. 73.5—80.5°, 22.5 g, $n_D^{20}=1.4371$.

Fraction 73.5—80.5° C was again passed over the same contact under similar conditions. The condensate obtained (21.5 g) was distilled over metallic sodium: b. p. 72—78°, 19.7 g, $n_D^{20}=1.4338$.

Fraction 72—78° C was hydrogenated over platinized charcoal at 150°C. The hydrogenated product (18.6 g) had $n_D^{20}=1.4141$. After dehydrogenation over platinum at 300° C, 17.5 g of a hydrocarbon were obtained, having $n_D^{20}=1.4251$.

In order to eliminate benzene from the condensate the latter was treated with fuming sulphuric acid containing 5% of SO_3, and the remaining hydrocarbon was distilled over metallic sodium. Methylcyclopentane (12.6 g) was obtained, having the following properties:

b. p. 70.0 — 71.5°/747 mm; $n_D^{15.5}=1.4099$;

$d_4^{15.5}=0.7452$;

$MR=27.95$; calculated for C_6H_{12} $MR=27.71$

Thus, beryllium oxide calls forth the isomerization of cyclohexene into methylcyclopentene, the hydrogenation of which yielded methylcyclopentane. Further we convinced ourselves that at 400—450° C thorium dioxide, vanadium trioxide, zirconium dioxide and manganese monoxide only dehydrogenate cyclohexene into benzene to a slight degree, but bring about no isomerization into methylcyclopentene.

Titanium Dioxide and Cyclohexane. As described above, cyclohexene at 450°C is dehydrogenated by titanium dioxide into benzene and simultaneously isomerized into methylcyclopentene. It seemed interesting to study the behaviour of cyclohexane under similar conditions.

As far back as in 1915 it was found by Zelinsky ([3]) that titanium dioxide was a good dehydrogenating agent for naphtenic gasolines. In 1937 it was shown by Moldavsky ([4]) that at 500° titanium dioxide brought about the dehydrogenation of cyclohexane into benzene.

We brought cyclohexane into contact with titanium dioxide at 450° C. Cyclohexane (b. p. 81.0—81.5°/761 mm; $n_D^{20}=1.4269$), of which 7.8 g were taken, was passed at 450° C over titanium dioxide at a rate of 3.5 g per hour. The condensate had a b. p. 78—80° at 753 mm and $n_D^{20}=1.4341$. Titanium dioxide begins to dehydrogenate cyclohexane into benzene already at 450° C.

Beryllium Oxide and Cyclohexane. 11.4 g of cyclohexane (b. p. 79.5—80.0°/748 mm; $n_D^{21}=1.4270$) were brought into contact with beryllium oxide at 450°C and at a rate of 3.5 g per hour. The condensate (10.2 g) had a b. p. 79—80° at 748 mm and $n_D^{22}=1.4265$.

Cyclohexane undergoes no changes in the presence of beryllium oxide at 450° C.

Beryllium Oxide and Heptene-1. Heptene-1* used in the experiment had the following properties: b. p. 91.9—92.0°/741 mm; $n_D^{20}=1.4000$; $d_4^{20}=0.6974$.

11.0 g of heptene-1 were brought into contact with beryllium oxide at 450° C and at a rate of 5 g per hour. The condensate (10.3 g) was distilled over metallic sodium: b. p. 92—95°, 9.4 g, $n_D^{20}=1.4074$.

* A very pure sample of heptene-1 was placed at the disposal of N. D. Zelinsky by A. F. Platé.

Fraction 92—95° C was passed again over beryllium oxide under the same conditions. The condensate obtained (8.4 g) was distilled over metallic sodium: b. p. 92—96°, 7.8 g, $n_D^{20}=1.4082$, $d_4^{20}=0.7041$.

7.5 g of this fraction were hydrogenated in the presence of platinized charcoal at 140° C. The condensate of a saturated character (7.1 g) was dried over calcium chloride and distilled over metallic sodium. A hydrocarbon was obtained (6.7 g) having the following properties:

b. p. 92.0 — 96.0°/749 mm; $n_D^{20}=1.3889$;

$d_4^{20}=0.6836$.

$MR=34.63$; calculated for C_7H_{16} $MR=34.53$

On the base of the data obtained we came to the conclusion that heptene-1 under the contact action of beryllium oxide had undergone to a considerable degree an isomerization into a hydrocarbon having a branched structure, probably into 3-methyl-hexene-2, through the hydrogenation of which over platinized charcoal 3-methylhexane was obtained, boiling at 92°*. The isomerization product having a b. p. 92—96° C should be considered as a mixture of 3-methylhexane and *n*-heptane.

N. D. Zelinsky Laboratory of Organic Chemistry.
State University of Moscow.

Received
7. XII. 1940.

REFERENCES

[1] N. D. Zelinsky and J. A. Arbusov, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIII, 793 (1939). [2] N. D. Zelinsky and J. A. Arbusov, ibid., XXIV, 542 (1939). [3] Н. Д. Зелинский, ЖРФХО, **47**, 1807 (1915). [4] Б. Молдавский, Г. Камушер и М. Кобылькая, ЖОХ, **7**, 1835 (1937). [5] Soday and Boord, J. Am. Chem. Soc., **55**, 3293 (1933). [6] Edgar, Calingaert and Marker, ibid., **51**, 1483 (1929).

Translated by A. Platé.

* The following values are found in the literature: 3-methylhexene-2 [5] b. p. 93.1—93.3°/760 mm; $n_D^{20}=1.4080$; $d_4^{20}=0.7120$; 3-methylhexane [6] b. p. 91.8°/760 mm; $n_D^{20}=1.38873$; $d_4^{20}=0.6870$.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

CHEMISTRY

ACTION OF ALUMINIUM CHLORIDE ON CYCLOHEXANE

By J. A. ARBUSOV and N. D. ZELINSKY, Member of the Academy

In the investigations already published cyclohexane was isomerized by aluminium chloride into methylcyclopentane in the liquid phase ([1—7]). We have carried out the isomerization of this hydrocarbon under the influence of aluminium chloride in the vapour phase and found this isomerization to proceed very easily, when cyclohexane was brought into contact with aluminium chloride in a current of dry hydrogen chloride.

120 g of cyclohexane (b. p. 81—82°/761 mm, $n_D^{20} = 1.4269$) were passed over aluminium chloride (inside diameter of the reaction tube 12 mm, length of the aluminium chloride layer 50 cm) in a feeble current of dry hydrogen chloride at 125° and at a rate of 6 g per hour. A colourless condensate was collected in the receiver, and towards the end of the run a small amount of a resinous product as well. The condensate was washed 3 times with water and dried with calcium chloride. 104.9 g were obtained, the product having $n_D^{20} = 1.4208$. When subjected to fractional distillation, the following fractions were obtained:

	g	n_D^{20}
1) 55 — 71°	2.6	1.4007
2) 71 — 81°	80.5	1.4189
3) 81 — 110°	7.0	1.4248
4) 110 — 145°	2.4	1.4285
5) 145 — 210°	0.7	1.4600
6) Resinous residue		

40.0 g of fraction 71—81° were again passed over fresh aluminium chloride under the same conditions. When washed and dried the condensate had $n_D^{20} = 1.4180$. Fractional distillation gave the following results:

	g	n_D^{20}
1) 51 — 71°	1.1	1.3860
2) 71 — 80.5°	26.1	1.4173
3) 80.5 — 115°	2.6	1.4250
4) Residue		

In order to eliminate the remaining cyclohexane, fraction 71—80.5° was dehydrogenated over platinized charcoal in a feeble current of carbon dioxide at 300°. The dehydrogenation product had $n_D^{20} = 1.4489$. For the elimination of benzene it was treated with concentrated sulphuric acid (monohydrate), washed, dried and distilled over metallic sodium. The

hydrocarbon obtained had the following properties: b. p. 68—71°/745 mm $n_D^{20} = 1.4028$; $d_4^{20} = 0.7286$.

This hydrocarbon consisted of methylcyclopentane, containing a small amount of paraffinic hydrocarbons (hexanes).

From the data given above it follows that when cyclohexane was brought into contact with aluminium chloride in the presence of hydrogen chloride at 125°, its isomerization into methylcyclopentane took place, accompanied with the formation of paraffinic hydrocarbons (isomeric hexanes) and a small amount of high boiling products. The latter consisted, probably, of methylated cyclohexane homologues and of dicyclohexyl.

N. D. Zelinsky Laboratory of Organic Chemistry.
State University of Moscow.

Received
31. XII. 1940.

REFERENCES

[1] Aschan, Lieb. Ann., **324**, 12 (1902). [2] Н. Д. Зелинский и М. Б. Турова-Поляк, ЖОХ, **2**, 666 (1932); Ber., **65**, 1171 (1932). [3] Nenitzescu und Cantuniari, Ber., **66**, 1097 (1933). [4] Ipatieff and Komarewsky, J. Am. Chem. Soc., **56**, 1926 (1934). [5] М. Б. Турова-Поляк и Н. Б. Барановская, ЖОХ, **9**, 429 (1939). [6] Glasebrook and Lovell, J. Am. Chem. Soc., **61**, 1717 (1939). [7] Schuit, Hoog and Verheus, Chem. Zbl., II, 2000 (1940).

Translated by A. Platé.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

CHEMISTRY

ON THE STRUCTURE OF *l*-PIMARIC ACID

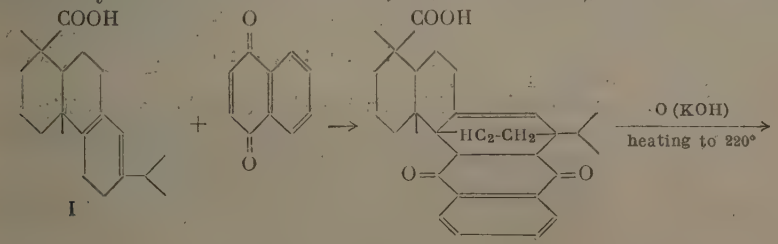
By B. A. ARBUSOV

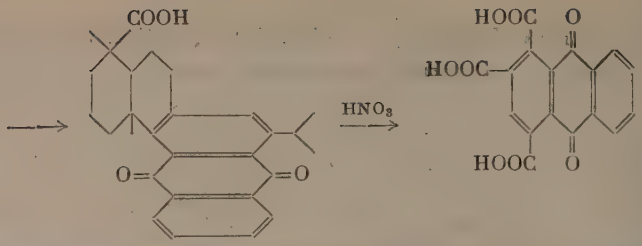
(Communicated by N. D. Zelinsky, Member of the Academy, 30.XII.1940)

Notwithstanding numerous papers dealing with the possible position of the double bands in pimaric acid (1), this problem cannot be considered up to the present as definitely solved. The most likely position of the double bands in *l*-pimaric acid is considered to be position 7 : 8, 13 : 14 (2, 3) (I) and 6 : 7, 8 : 14 [previous formula of Ruzicka (4), Malevskaya (5)] (II).

In a former paper the author has demonstrated that the problem concerning the position of the double bands in *l*-pimaric acid could be solved only by proving the structure of the anthraquinone-dicarboxylic acid obtained by the author from α-naphtoquinone-*l*-pimaric acid. The melting point of the new acid (336—337°), according to data found in the literature, was nearest to that of 2.3-anthraquinone-dicarboxylic acid (340—342°, 340°, 336—338°). However, in order to have a strict proof of the structure of the anthraquinone-dicarboxylic acid obtained by the author from *l*-pimaric acid, more definite data were needed.

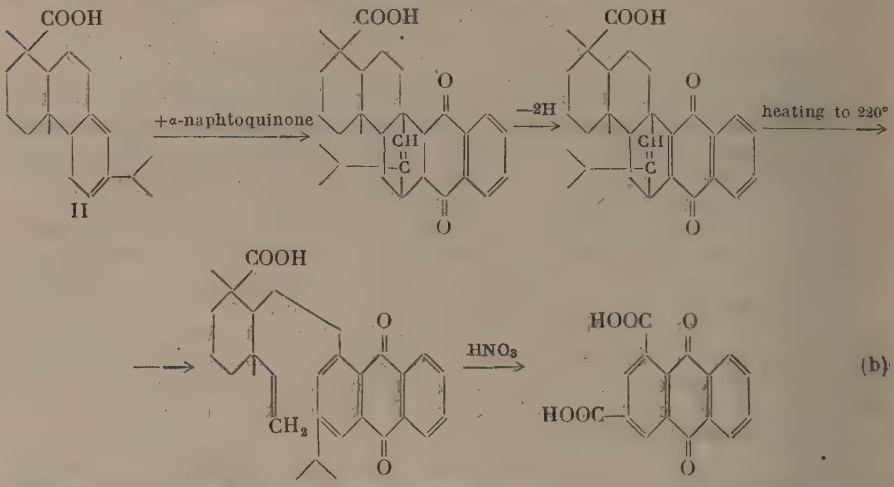
2.3-Anthraquinone-dicarboxylic acid was prepared through the oxidation of 2.3-dimethyl-anthraquinone (m. p. 203—205°) with nitric acid. The melting point of the synthetic 2.3-anthraquinone-dicarboxylic acid determined in a brass block with a short range thermometer was found to be 348—350°C (with decomposition), whereas the melting point, determined under similar conditions, of anthraquinone-dicarboxylic acid obtained from α-naphtoquinone-*l*-pimaric acid was 339—340°C (with decomposition). Neither had the 2.3-acid the same solubility and the same form of crystals as had the acid with m. p. 339—340° from *l*-pimaric acid. The dimethyl ester of 2.3-anthraquinone-dicarboxylic acid was also quite different from the dimethyl ester of the acid obtained from α-naphtoquinone-*l*-pimaric acid. Therefore, the position of the double bands in *l*-pimaric acid 5 : 13, 8 : 14, in case of which 2.3-anthraquinone-dicarboxylic acid should have been obtained, must be discarded. If we accept for *l*-pimaric acid the Fieser formula (I), the transformations expressed by scheme (a) should yield 1.2.4-anthraquinone-tricarboxylic acid.





(a)

Thus, the formula of Fieser does not agree with the author's having obtained an anthraquinone-dicarboxylic acid. In case we accept structural formula II for *l*-pimaric acid, we should expect the formation of 1.3-anthraquinone-dicarboxylic acid, this being shown by scheme (b).



(b)

The values found in the literature for the melting point of the 1.3-dicarboxylic acid are much lower [330°, 320—325° (⁶)] than the m. p. of the anthraquinone-dicarboxylic acid from *l*-pimaric acid (339—340°). However, when the melting point of 1.3-dicarboxylic acid, obtained through the oxidation of 1.3-dimethyl-anthraquinone, was determined using a brass block and a short range thermometer, the value 339—340°C (with decomposition) was obtained. A mixed test with the anthraquinone-dicarboxylic acid from *l*-pimaric acid gave no depression (338—340°).

The dimethyl ester of the synthetic 1.3-anthraquinone-dicarboxylic acid obtained by way of the silver salt had m. p. 183—184°C and proved to be identical with the dimethyl ester obtained from the anthraquinone-dicarboxylic acid from *l*-pimaric acid by way of the acid chloride or the silver salt (m. p. 183—184°C). A mixed test gave no depression.

The addition of α-naphtoquinone to *l*-pimaric acid takes place at room temperature and in a neutral medium, thus the isomerization of *l*-pimaric acid being excluded. Among all the possible combinations of conjugated double bands in *l*-pimaric acid, position 6 : 7, 8 : 14 only can yield 1.3-anthraquinone-dicarboxylic acid.

Accordingly, one should consider as finally proved the identity of the acid from α -naphtoquinone-*l*-pimaric acid with 1.3-anthraquinone-dicarboxylic acid and therefore structure II for *l*-pimaric acid.

Synthesis of the Dimethyl Ester from the Anthraquinone-dicarboxylic Acid (from *l*-pimaric acid)

by Way of the Ag salt. 0.62 g of the acid (m. p. 339—340° with decomposition) were dissolved in dilute ammonium hydroxide giving a solution coloured orange-red. After the elimination of the excess of ammonium hydroxide, a solution of silver nitrate was added. The silver salt precipitated and was washed with water, alcohol and dry ether. The salt was refluxed 4 hours in benzene with methyl iodide taken in excess. 0.35 g of the ester were obtained from the benzene solution after two crystallizations from ethyl acetate, m. p. 183—184°C, in an apparatus with sulphuric acid, or 189—190°C when using a block and a short range thermometer.

Synthesis of 1.3-anthraquinone-dicarboxylic Acid and of its Dimethyl Ester. The acid was obtained through the oxidation of 1.3-dimethyl-anthraqinone (m. p. 157—158°) with nitric acid in long yellow needles, m. p. 338—339° (with decomposition). The dimethyl ester was prepared from the Ag salt under conditions described above. From 1.9 g of the acid 1.2 g of the ester were obtained. After two crystallizations from ethylacetate, m. p. 183—184°. Mixed test 183—184°.

State University of Kazan.
Butlerov Chemical Research Institute.

Received
31. XII. 1940.

REFERENCES

[1] Bull. Acad. Sci. URSS, sér. chim., **95** (1940). [2] Am. Soc., **60**, 162 (1938). [3] Helv., **21**, 567, 583 (1938). [4] Helv., **15**, 1289 (1932). [5] ЖПХ, XIII, 1085 (1940). [6] Am. Soc., **58**, 1445; J. prakt. Chem., **41**, 21 (1890).

Translated by A. Platé.

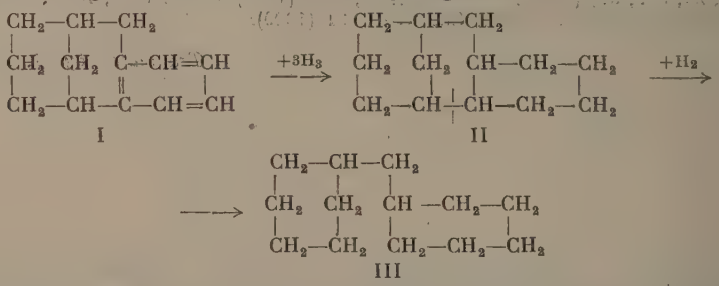
Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

CHEMISTRY

CONTACT DEHYDROGENATION OF BENZBICYCLONONENE

By N. V. ELAGINA and N. D. ZELINSKY, Member of the Academy

We have found lately (1) that benzbicyclononene I under conditions of hydrogenation by contact was easily converted by passing through an intermediate phase—hexahydrobenzbicyclononene II—into bicyclohexylmethane III. This transformation was accompanied with the cleavage of the six-member ring and the addition of 9 hydrogen atoms:



Cook and Hewett (2) have attempted to dehydrogenate benzbicyclononene in the presence of selenium, platinum-black and platinized asbestos (3). In neither case could they obtain data proving the capacity of this hydrocarbon to undergo dehydrogenation. After heating with selenium for a long time the hydrocarbon remained unchanged. Even when this hydrocarbon was passed over platinized asbestos at 340—360°C, no evolution of hydrogen was observed and the hydrocarbon underwent no change.

In order to find out whether benzbicyclononene was capable of dehydrogenation, the following experiments were carried out: 2.3-benz-1.3.3-bicyclo-Δ^2-nonene was prepared through the cyclodehydration of 1-benzyl-cyclohexanol-1 with phosphoric oxide and had the following properties: b. p. 121—123°/14 mm; $d_4^{21} = 0.9848$; $n_D^{21} = 1.5431$.

6 g of this hydrocarbon were passed over platinized activated charcoal (length of Pt-carbon layer 30 cm, inner diameter of the reaction tube 10 mm) in a feeble current of hydrogen at a rate of 4 drops per minute and a temperature of 300°C. Evolution of hydrogen was observed. The refractive index of the condensate obtained after one passage increased compared to that of the initial hydrocarbon: $n_D^{20} = 1.5592$. When this condensate was repeatedly passed over the contact under the same conditions, the refractive index underwent the following changes: $n_D^{19} = 1.5625$; 1.5659; 1.5660.

The condensate obtained after passing the hydrocarbon 4 times over the catalysts was distilled over metallic sodium. The hydrocarbon obtained

(4.5 g) had the following properties: b. p. 260—262°/749 mm; $d_4^{19}=1.0030$; $n_D^{19}=1.5680$; $MR=54.83$; calculated for $C_{13}H_{12}|^{=}_{6}$—55.02.

When cooled, the hydrocarbon crystallized in long prismatic needles, m. p. 26°C. A mixed test with diphenyl-methane gave no depression (m. p. 26°C).

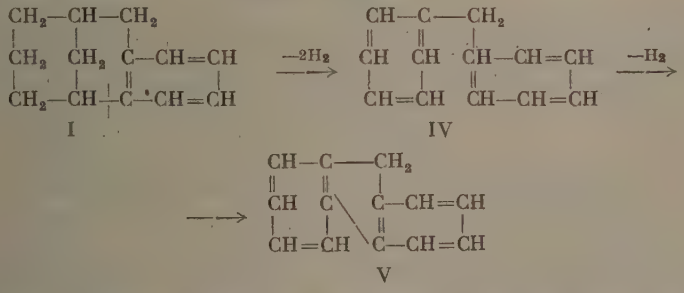
In another run, using a more active platinized charcoal, 2.3-benz-1.3.3-bicyclo-Δ^2-nonene (25 g) were passed over the catalyst (length of Pt-charcoal layer 50 cm, inner diameter of the tube 10 mm) at 300° and at a rate of 4 drops per miner. A vigorous evolution of hydrogen took place. The refractive index of the condensate obtained after passing the hydrocarbon over the catalyst only once had increased considerably: $n_D^{23}=1.5730$. The product consisted of a liquid part and of a crystalline substance. The crystals were recrystallized from alcohol: m. p. 114°C. A mixed test with fluorene gave no depression. After cooling to a low temperature, crystals were isolated from the liquid part and proved also to be fluorene.

The remaining liquid product was distilled over metallic sodium and the following fractions were obtained:

I Below 260° . . .	$n_D^{21}=1.5499$	1 g
II 260—262° . . .	$n_D^{20}=1.5642$	13 g
III Above 260° . . .	$n_D^{21}=1.5802$	2 g

Fraction I consisted mainly of the original hydrocarbon. Fraction II had constants very near those of diphenyl-methane: b. p. 260—262°/753 mm; $d_4^{20}=1.0060$; $n_D^{20}=1.5642$. Fraction III partly crystallized and proved to be fluorene.

Thus, it has been proved that, notwithstanding the assertion of Cook and Hewett, benzbicyclononene I is capable of dehydrogenation. Its dehydrogenation is accompanied with the cleavage of the intermediate six-member ring with the formation of diphenyl-methane IV:



The latter, in contact with platinum, gives up two hydrogen atoms more, being converted into the condensed system of fluorene V. The transformation of diphenyl-methane into fluorene has been observed previously by N. D. Zelinsky and I. N. Titz [4].

N. D. Zelinsky Laboratory of Organic Chemistry.
State University of Moscow.

Received
7. XII. 1940.

REFERENCES

[1] N. D. Zelinsky and N. V. Elagina, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIII, 798 (1939). [2] Cook and Hewett, J. Chem. Soc., 1098 (1933). [3] Cook and Hewett, ibid., 62 (1936). [4] N. D. Zelinsky and I. N. Titz, Ber., 59, 2590 (1926).

Translated by A. Platé.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

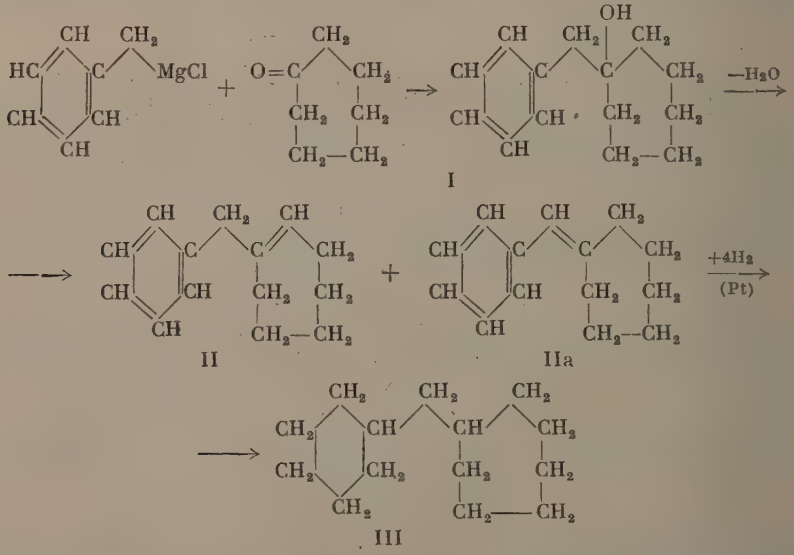
CHEMISTRY

ON CYCLOHEXYL-CYCLOHEPTYL-METHANE AND ITS RELATION TOWARDS CATALYTIC DEHYDROGENATION

By N. V. ELAGINA and N. D. ZELINSKY, Member of the Academy

In dicyclic hydrocarbons, containing a five-member and a six-member cycle, only the latter easily undergoes catalytic dehydrogenation, whereas the five-member cycle remains unchanged (1). It seemed interesting to study in this respect a hydrocarbon containing a six-member and a seven-member cycle, viz. cyclohexyl-cycloheptyl-methane.

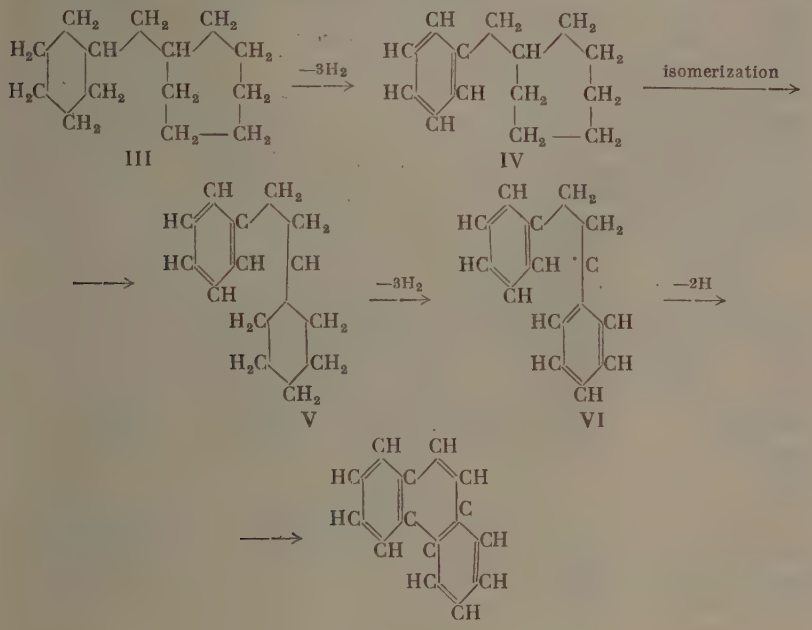
This hydrocarbon was synthesized by us in the following way. By the reaction of benzyl-magnesium-chloride with cycloheptanone 1-benzyl-cycloheptanol-1 (I) was obtained. Its dehydration yielded a mixture of 1-benzyl-cycloheptene-1 (II) and of benzylidene-cycloheptane (IIa) which was hydrogenated over platinized charcoal at 220°C giving cyclohexyl-cycloheptyl-methane (III).



Theoretically one should expect, that cyclohexyl-cycloheptyl-methane, under usual conditions of dehydrogenation catalysis, should be converted into benzyl-cycloheptane (IV). However, the experiment which consisted in the dehydrogenation of this hydrocarbon over platinized activated char-

coal at 300°C demonstrated that the process did not stop at the formation of benzyl-cycloheptane, and that the final reaction product was a crystalline hydrocarbon which was identified as p h e n a n t h r e n e.

The transformation of cyclohexyl-cycloheptyl-methane into phenanthrene can be expressed by the following scheme:



Cyclohexyl-cycloheptyl-methane (III) is first dehydrogenated into benzyl-cycloheptane (IV); then the isomerization of the seven-member ring takes place with the formation of phenyl-cyclohexyl-ethane (V), which is dehydrogenated into diphenyl-ethane (VI), and the latter, giving up 4 hydrogen atoms, is converted into phenanthrene (VII).

Thus, the dehydrogenation of cyclohexyl-cycloheptyl-methane proceeds with a simultaneous isomerization of the seven-member ring into the six-member one, this finally leading to the formation of phenanthrene exclusively. The fact that diphenyl-ethane, when brought into contact with platinum, gives up 4 hydrogen atoms being converted into phenanthrene, has already been known from the paper of N. D. Zelinsky and I. N. Titz (²).

C y c l o h e p t a n o n e. Cycloheptanone was prepared by the thermal decomposition of suberic acid in the presence of barium hydroxide. 300 g of this acid yielded 65 g of cycloheptanone, b. p. 178—182°/763 mm; $n_D^{17} = 1.4615$.

1-B e n z y l - c y c l o h e p t a n o l - 1. Benzyl-magnesium-chloride was prepared as follows. To 9.8 g of powdered magnesium and 60 cm³ of dry ether contained in a flask a mixture of 50.6 g of freshly distilled benzyl chloride and 70 cm³ of dry ether were added dropwise during 4 hours. To bring the reaction to an end, the reaction mixture was refluxed for 1 hour on a water bath. The organomagnesium complex was cooled with ice, and a mixture of 36.1 g of cycloheptanone and 50 cm³ of dry ether was added dropwise. After standing during the night the reaction product was isolated in the usual manner:

Yield of 1-benzyl-cycloheptanol-1 : 46.7 g (71%). B. p. 157—160°/11 mm. The product shortly crystallized in long colourless needles, m. p. 46.5°.

Anal. subs. 0.1941 g; CO_2—0.5819 g; H_2O — 0.1710 g
$C_{14}H_{20}O$ Found %: C — 81.76; H — 9.86
Calcd. %: C — 82.29; H — 9.87

Dehydration of 1-Benzyl-cycloheptanol-1. In a 150 cm³ round-bottom flask, fitted with a reflux condenser, were placed 10 g of 1-benzyl-cycloheptanol-1 and 20 g of anhydrous oxalic acid. The mixture was heated for 2 hours on a metallic bath to 140—150° C. After cooling the reaction mixture was treated with water and extracted with ether. The ether solution was washed with water and a feeble solution of alkali, and dried with sodium sulphate. After the elimination of ether the hydrocarbon was distilled over metallic sodium. From several runs 33 g of the hydrocarbon were obtained (yield 80%), which had the following properties:

b. p. 126 — 127.5°/8 mm; $d_4^{20} = 0.9622$; $n_D^{20} = 1.5484$; $MR = 61.48$;
Calcd. for $C_{14}H_{18}|^{=}_{4}$ — 60.58.

The increment of the molecular refraction compared to the one calculated for benzyl-cycloheptene can be explained by the fact that during the dehydration of 1-benzyl-cycloheptanol-1, next to 1-benzyl-cycloheptene-1 the formation of its isomer, benzylidene-cycloheptane, takes place. As the latter has a semicyclic double bond which is in a conjugated position towards the benzene nucleus, the value of its molecular refraction should be somewhat higher.

Dehydration of 1-Benzyl-cycloheptanol-1 with Aqueous Oxalic Acid. In a 150 cm³ round-bottom flask, fitted with a reflux condenser, were placed 11 g of 1-benzyl-cycloheptanol-1, 22 g of crystalline oxalic acid, and 1 cm³ of water was added. The mixture was heated for 3 hrs on a metallic bath to 120—130° C. After cooling the reaction mixture was diluted with water and the aqueous solution was extracted with ether. The ether extract was washed and dried over sodium sulphate. The ether was distilled off and the residue distilled over metallic sodium. Yield of hydrocarbon 8.4 g (83.7%). It had the following properties:

b. p. 124 — 125°/8 mm; $d_4^{20} = 0.9572$; $n_D^{20} = 1.5431$; $MR = 61.31$;
Calcd. for $C_{14}H_{18}|^{=}_{4}$ — 60.58.

As it may be seen from the constants given above, the dehydration of 1-benzyl-cycloheptanol-1 with aqueous oxalic acid also leads to the formation of a mixture of 1-benzyl-cycloheptene-1 and of benzylidene-cycloheptane.

Hydrogenation of 1-Benzyl-cycloheptene-1 and of Benzylidene-cycloheptane. The hydrocarbon obtained through the dehydration of 1-benzyl-cycloheptanol-1 with anhydrous oxalic acid (22 g) was passed through a tube containing platinized activated charcoal in an atmosphere of hydrogen at a rate of 6—8 drops per minute at 250° C. The condensate had a refractive index $n_D^{22} = 1.5069$. In the following runs the temperature was lowered to 220° C. After subsequent runs the index of refraction underwent the following change: $n_D^{22} = 1.4857$; 1.4812; 1.4811.

The condensate was treated with sulphuric acid, washed with water, dilute alkali and again with water, dried over fused calcium chloride and distilled over metallic sodium. 16 g of cyclohexyl-cycloheptyl-methane were obtained, that had the following properties:

b. p. 273 — 274.5°/739 mm; $d_4^{20} = 0.8820$; $n_D^{20} = 1.4810$; $MR = 62.66$;
Calcd. for $C_{14}H_{26}$ 62.45
Anal. Subs. 0.1425 g; CO_2 — 0.4508; H_2O — 0.1687.
$C_{14}H_{26}$ Found %: C — 86.28; H — 13.25
Calcd %; C — 86.50; H — 13.50

Dehydrogenation of Cyclohexyl-cycloheptyl-methane. Cyclohexyl-cycloheptyl-methane was passed over platinized charcoal in a feeble current of hydrogen at 300° C and at a rate of 6—7 drops per minute. The refractive index of the condensate was $n_D^{22} = 1.5365$. On the cold parts of the catalytic tube there appeared a crystalline substance, the amount of which increased in subsequent runs. The index of refraction underwent the following change: $n_D^{22} = 1.5481$; 1.5548; 1.5574.

The product obtained consisted of a liquid phase and of a crystalline substance. The liquid part had a refractive index $n_D^{21} = 1.5665$. It was again brought into contact with the catalyst and the refractive index of the condensate increased to $n_D^{22} = 1.5682$. When cooled to a low temperature, the condensate crystallized almost completely. The crystals were filtered off, pressed on a porous plate and recrystallized from alcohol. Lustrous white laminae were obtained, m. p. 100° C. A mixed test with phenanthrene gave no depression. A picrate was obtained in gold-yellow laminae, when the alcohol solution of the hydrocarbon was mixed with an alcohol solution of picric acid saturated in the cold. The crystals were filtered off and recrystallized from alcohol: m. p. 141—143° C. A mixed sample with phenanthrene picrate had the same melting point.

N. D. Zelinsky Laboratory of Organic Chemistry.
State University of Moscow.

Received
7. XII. 1940.

REFERENCES

[1] N. D. Zelinsky, I. N. Titz and L. Fateev, Ber., **59**, 2580 (1926); N. D. Zelinsky and I. N. Titz, Ber., **64**, 183 (1931). [2] N. D. Zelinsky and I. N. Titz, Ber., **62**, 2869 (1929).

Translated by A. Platé.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

CHEMISTRY

CHANGE OF INTENSITY IN RUBIDIUM LINES CAUSED BY THE PRESENCE OF CERTAIN SALTS AND ACIDS IN SOLUTION

By S. A. BOROVICK and T. F. BOROVICK-ROMANOVA

(Communicated by W. I. Vernadsky, Member of the Academy, 20.XII.1940)

The problem of the action of various factors on the intensity of spectra lines is very important in working out a method for determining a given element by spectral analysis. This action was first observed by us for titanium and vanadium (1). It was observed that in the presence of NaCl and KCl the lines of the neutral atom became stronger, while the lines of the ionized atom became weaker. Later this phenomenon was studied theoretically in a paper by Mandelstam (2). After this, there appeared a great number of papers by various authors dealing with the problem of the action of the brutto composition upon the intensity of the lines.

In connexion with the further development of a method for determining rubidium, this paper is devoted to a study of the action of various concentrations of Na and K salts and hydrochloric and acetic acids in solution on the intensity of rubidium lines. We were interested in Na and K salts, because they are always present in the solutions obtained during the extraction of alkalis after the Lawrence Smith method; the acids were tested in order to compare their action with that of Na and K salts.

The light source was a spark excited after Feiosner's diagram. The liquid was poured into the cup electrode first proposed by Gerlach; but the gold-plated metal cup was substituted by a glass one and the gold mound by a carbon rod. The upper electrode was also of carbon. The upper and lower carbons were shaped into wedges and the lower carbon had, besides, a cut in its middle, 0.3 mm wide. Experiments showed that such a shape gives greater intensity and stability to the lines, as compared to circular electrodes. In order to keep the conditions of spark excitation more constant, the tension in the primary circuit was kept steady at 90 volts and controlled by means of a thermal voltmeter.

The rubidium concentration was the same in all the experiments—0.01% metal. The salts and acids were added in concentrations so that the action of equal numbers of ions of various elements and radicles could be compared. Solutions of CH_3COOH, HCl, Na_2SO_4, NaCl, KCl were taken in three concentrations: 0.01 *N*, 0.1 *N* and normal. The spectrograms were taken by means of a Hilger spectrograph with glass optics; the photographic plates were Nikfi-Infrachrome 810. The blackening of the rubidium lines 7947.63 Å was measured by means of a Zeiss microphotometer for spectral lines.

The results are given in the diagram (Fig. 1). In this diagram the logarithms of the admixture concentrations expressed in fractions of normal are plotted along the horizontal axis; the vertical axis gives the readings of the galvanometer. The deflection corresponding to the background is put at zero.

The diagram shows that the greatest intensification of rubidium lines is given by KCl; a normal solution of KCl gives an intensification equal to that obtained by increasing the concentrations of Rb approximately 5 times. The intensification caused by NaCl is somewhat less; Na_2SO_4 has almost the same influence; the effect of acetic and hydrochloric acids is insignificant. The change in the curve's inclination shows that as the concentration of the admixture increases, the intensification of the lines tends to saturation.

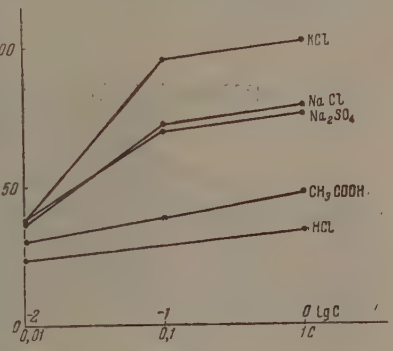


Fig. 1.

As the rubidium lines became stronger, the oxygen lines in this part of the spectrum became weaker. The latter are very bright in pure water, but weaken considerably with high concentrations of salts.

In order to determine that the intensification of rubidium lines was not due to intensification of the discharge, the current in the spark circuit was measured; for a number of reasons these measurements were made after the following manner. A low-voltage (5 volts) incandescent lamp was switched into the spark circuit in series with the spark; an ordinary thermopile was set up at some distance from the lamp. The current produced by the thermopile and therefore the current in the spark circuit was measured by an indicator galvanometer with a sensitivity of 10^{-6} amperes. Having graduated this apparatus with direct current, we determined the current in the circuit at 0.2 amperes.

It was found that all the solutions which caused such great fluctuations in the intensity of rubidium lines, caused fluctuations in the current of the spark circuit of not over 1%, i. e. the current remained practically unchanged; at the same time any fluctuation in the tension of the primary circuit of the transformer or any change in the length of the spark gap would cause considerable fluctuations in the current of the spark circuit. The results of these experiments have their practical value in making it possible to increase the sensitivity of analysis by means of adding NaCl or KCl to the sample.

Received
29. XII. 1940.

REFERENCES

[1] S. A. Borovick and T. F. Borovick-Romanova, C. R. Acad. Sci. URSS, XV, 535 (1937). [2] S. A. Mandelstam, ibid., XVIII, 559 (1938).

Translated by D. Sobolev.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PHYSICAL CHEMISTRY

IGNITION AND EXTINCTION OF SOLID SURFACES

By D. A. FRANK-KAMENETZKY

(Communicated by N. N. Semenov, Member of the Academy, 29.X.1940)

If a heterogeneous exothermic reaction proceeds on the surface of a solid (it may be either a reaction of a solid with a gas, e. g. the combustion of carbon, or catalytic reaction, e. g. the oxidation of hydrogen on a platinum surface), different thermal regimes of the reacting surface are possible.

As the author has shown (1), stable steady thermal regimes on the reacting surface can be divided into two sharply distinct groups. The first includes the regimes corresponding to the temperatures of surface considerably higher than the temperature in the volume of the gas. The reaction proceeds then according to the laws of a diffusional region (2). The second group includes the regimes, at which the temperature of the surface differs but slightly from the temperature in the volume of the gas and the reaction obeys the laws of a kinetic region (2). Transition from the regimes belonging in one of these groups to the regimes of the other group occurs discontinuously when the critical conditions of ignition or extinction are set up. The condition of ignition, or transition from the kinetic region to the diffusional one, does not coincide with the condition of extinction, when a reverse transition from the diffusional region to the kinetic one takes place.

It is the aim of the present paper to find a mathematical expression of these critical conditions of ignition and extinction for the simplest case of a first order reaction. In this case, as is known (2), the reaction velocity as a function of the concentration of reacting substance in the volume can be represented thus:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) = \frac{k\Delta}{k+\Delta} C. \tag{1}$$

Here $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ is the amount of substance reacting on unit surface in unit time; C is the concentration of the reacting substance in the volume; k is the constant of reaction velocity, which depends upon temperature according to the Arrhenius' law:

$$k = ze^{-\frac{E}{RT}} \tag{2}$$

and Δ is the constant of diffusion velocity determined by the expression

$$\Delta = \frac{NuD}{d} \tag{3}$$

where Nu is the Nusselt's criterion depending on the geometrical configuration of the system and on the conditions of convection. D is the diffusion coef-

ficient of reacting substance, and d is the characteristic linear dimension of the system. If we denote the heat of reaction by Q, then the amount of heat produced by the reaction per unit surface in unit time will be:

$$q_1 = Q\left(\frac{dm}{dt}\right) = Q\,\frac{k\Delta}{k+\Delta}\,C. \tag{4}$$

A steady thermal regime will be established when this quantity of heat will become equal to that carried away from the surface by thermal transfer:

$$q_2 = \alpha\,(T - T_0) \tag{5}$$

where α is the coefficient of thermal transfer, T_0 is the temperature of the surrounding medium. It follows that steady surface temperature may be found as the solution of the following equation:

$$Q\,\frac{ze^{-\frac{E}{RT}}\Delta}{ze^{-\frac{E}{RT}}+\Delta}\,C = \alpha\,(T - T_0). \tag{6}$$

We will try to find an approximate solution of the problem assuming $E \gg RT$. In this case we can recur to the expansion of the exponent of the Arrhenius' law proposed by the author in the theory of thermal ignition for homogeneous reactions ([3]):

$$k = ze^{-\frac{E}{RT}} \approx ze^{-\frac{E}{RT_0}}e^{\frac{E}{RT_0^2}(T-T_0)} = ze^{-\frac{E}{RT_0}}e^{\theta} \tag{7}$$

where $\theta = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0)$ is a non-dimensional temperature.

By means of expansion (7) and a transformation to the non-dimensional temperature θ, we bring equation (6) to the form:

$$\frac{Q}{\alpha}\,\frac{E}{RT_0^2}\,ze^{-\frac{E}{RT_0}}\,C\,\frac{e^{\theta}}{\frac{ze^{-\frac{E}{RT_0}}}{\Delta}e^{\theta}+1} = \theta. \tag{8}$$

The transcendental equation (8) determines the values of θ corresponding to steady thermal regimes of the surface. Let us introduce the following symbols for the non-dimensional parameters:

$$\frac{Q}{\alpha}\,\frac{E}{RT_0^2}\,ze^{-\frac{E}{RT_0}}\,C = \delta;\quad \frac{ze^{-\frac{E}{RT_0}}}{\Delta} = \mu;\quad \xi = \frac{\delta}{\mu} = \frac{Q}{\alpha}\,\frac{E}{RT_0^2}\,\Delta C.$$

Then (8) takes the form

$$\delta\,\frac{e^{\theta}}{\mu e^{\theta}+1} = \theta, \qquad \delta = \theta\,(\mu + e^{-\theta}). \tag{9}$$

In order to determine the general properties of the solutions of equation (9) we denote its right-hand side by $f(\theta)$. If $f(\theta)$ is a monotonous function, equation (9) always has a single solution, and so there are no critical phenomena. If $f(\theta)$ has some extremums, several steady regimes will be possible and the extremal points correspond to the critical conditions of transition from one regime to another.

It follows that the critical conditions of ignition and extinction are to be found from the equation:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \mu + e^{-\theta} - \theta e^{-\theta} = 0, \tag{10}$$

$$\mu = e^{-\theta}(\theta - 1). \tag{11}$$

For practical calculations we will introduce an auxiliary variable $x = e^{-\theta}$, the possible values of which are between zero and $\frac{1}{e}$. With this variable the critical condition in the parametrical form will be:

$$\delta_{cr} = x \ln^2 x, \quad \xi = \frac{\ln^2 x}{-\ln x - 1}. \tag{12}$$

With $\xi < 4$ the temperature of the surface varies continuously with the alterations of external conditions. On the contrary, with $\xi > 4$ we must expect a discontinuous transition from the diffusional region to the kinetic one, under the critical conditions of ignition and extinction.

As one can see from (12), with $\xi \gg 1$ the critical condition may correspond either to $\theta = (-\ln x) \approx 1$ or to $\theta = (-\ln x) \gg 1$. In the first case we obtain:

$$\delta_{cr} = \frac{1}{e}. \tag{13}$$

This is the limiting form for condition of ignition for high values of ξ. The result (13) was already obtained by a less rigorous method in my previous paper [1].

If we assume in (12) $(-\ln x) \gg 1$, we shall obtain the limiting form for the condition of extinction for high values of ξ. Thus we obtain:

$$\xi = -\ln x, \tag{14}$$

$$\delta_{cr} = \xi^2 e^{-\xi}. \tag{15}$$

It may be noted that for the surface temperature we have

$$\theta = -\ln x \approx \xi. \tag{16}$$

This result is only natural. If the reaction proceeds according to the laws of the diffusional region, then the amount of heat evolved per unit surface in unit time will be given by $Q\Delta C$; comparing this with the rate of thermal transfer $\alpha(T - T_0)$, we obtain for the temperature of the surface T attained in the diffusional region: $T - T_0 = \frac{Q\Delta C}{\alpha}$.

According to the above-given definition of non-dimensional temperature θ, the non-dimensional surface temperature in the diffusional region will be:

$$\theta_m = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0) = \frac{E}{RT_0^2}\frac{Q\Delta C}{\alpha}$$

which is identical with the definition of the parameter ξ. Thus, the physical significance of the parameter ξ becomes obvious: it expresses the non-dimensional maximum surface temperature attained in the purely diffusional region. The result (16) means that with high values of ξ the upper thermal regime corresponds to a purely diffusional region. It is easy to see that with $\xi \gg 1$ the lower temperature regime corresponds to a purely kinetic region $\left(\mu = \frac{\delta}{\xi} \ll 1; \quad \Delta \gg ze^{-\frac{E}{RT_0}}\right)$.

The region intermediary between the diffusional region and the kinetic one cannot actually come into being in the case of strongly exothermic reactions with a high temperature coefficient, since it corresponds to unstable thermal regimes.

We can transform the critical conditions of ignition and extinction for high values of ξ to such a form that they should contain the tem-

perature of the surface. For this purpose we may, using (16), write (15) in the form

$$\delta_{cr} e^{\theta} = \xi^2. \tag{17}$$

Now we can reduce to a considerable extent the error introduced by the expansion (7). Restoring the accurate value $e^{-\frac{E}{RT}}$ instead of $e^{-\frac{E}{RT_0}} e^{\theta}$, we obtain from (17): $\frac{Q}{\alpha} \frac{E}{RT_0^2} Cze^{-\frac{E}{RT}} = \xi^2$ or, substituting the value of ξ:

$$ze^{-\frac{E}{RT}} = \frac{E}{RT_0^2} \frac{Q\Delta^2 C}{\alpha}. \tag{18}$$

Here T denotes the temperature of the surface corresponding to the condition of extinction.

Similarly, for the condition of ignition with $\xi \gg 1$ we had $\theta = 1$ and $e^{-\frac{E}{RT}} = e^{-\frac{E}{RT_0}} e$. Therefore (13) can be written in the form:

$$ze^{-\frac{E}{RT}} = \frac{RT_0^2}{E} \frac{\alpha}{QC}. \tag{19}$$

Using the above-given definition of the parameter ξ, we have:

$$\frac{RT_0^2}{E} \frac{\alpha}{QC} = \frac{\Delta}{\xi}, \qquad \frac{E}{RT_0^2} \frac{Q\Delta^2 C}{\alpha} = \Delta\xi.$$

It follows that for high values of ξ we can express the critical conditions of ignition and extinction in the following convenient form: condition for ignition:

$$ze^{-\frac{E}{RT}} = \frac{\Delta}{\xi} \tag{20}$$

condition for extinction:

$$ze^{-\frac{E}{RT}} = \Delta\xi. \tag{21}$$

T is the temperature of the surface.

At the point of ignition the reaction velocity constant is ξ times smaller than the diffusion velocity constant. At the point of extinction the reaction velocity constant is ξ times as great as the diffusion velocity constant. It is then obvious that with high values of ξ, inferior to the ignition limit we have always the kinetic region, and superior to the extinction limit we have the diffusional one.

Experimental determination of the critical conditions for ignition and extinction is useful in studying the kinetics of strongly exothermic reactions. To measure the velocity directly is a difficult matter in such case, since the reaction proceeds at measurable rate in the diffusional region only.

The thermal regimes and critical conditions treated above have a real significance for the combustion of carbon ([1],[4]), as well as for some strongly exothermic processes of heterogeneous catalysis. Among the latter the catalytic oxidation of ammonia to nitric acid and of methanol to formaldehyde are of technical importance. Both these processes are always carried on with the upper temperature regime and at surface temperatures close to the theoretical one.

Institute of Chemical Physics.
Leningrad.

Received
13. XI. 1940.

REFERENCES

[1] Франк-Каменецкий, Журн. техн. физ., **9**, 1458 (1939). [2] Frank-Kamenetzky, Acta physicochim. URSS, **12**, 9(1940). [3] Frank-Kamenetzky, C. R. Acad. Sci. URSS, XVIII, 411 (1938); Acta physicochim. URSS, **10**, 365 (1939). [4] Блинов, Тр. Ворон. ун-та, XI, вып. 1.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

GEOCHEMISTRY

NEW DATA ON THE OPTICS AND CHEMISTRY OF CORUNDUM

By D. S. BELIANKIN, Corresponding Member of the Academy, V. V. LAPIN and I. M. SHUMILO

In the course of our study of Zestaphoni slags with a high alumina content from the smelting of chrome aluminium, we have lately observed a very curious phenomenon, to wit the crystallization of alumina in the forms of corundum with a variable but appreciably reduced refraction as compared to the literary standard, and with inclusions in its crystals of very thin crystalline lamellae, possessing the properties of β-alumina.

Due determinations were made by immersion. The N_0 of the corundum was measured in 50 separate grains in a Na-light to ± 0.002. After being recalculated to percent the data obtained were shown in a diagram (Fig. 1) in the shape of a broken line, marked by *3* (Zestaphoni); as may be seen, N_0 varies within the range 1.746—1.764. On the diagram (Fig. 2) the point *3* shows the average value of N_0 (Na) of the Zestaphoni corundum. The lamellae of the mineral included in corundum, supposed to be β-alumina, were found to be so thin as to make the determination of its N_0 impossible. Its general optics is as follows: direct extinction; sign of principal zone positive; refraction lower than that of corundum, and birefringence much higher (bright colours of interference in contradistinction to the grey colour of the 1st order in corundum grains).

To ascertain the chemical composition of Zestaphoni corundum, it had been isolated from the remainder of the slag by centrifuging with the Clerici solution, ground in an agate mortar and, after a treatment with HF and H_2SO_4 to eliminate silicic acid formed during grinding, subjected to chemical tests for its most important admixtures. All these tests, as well as those which followed, were made in such a way that corundum became fused with potassium pyrosulphate, the melting was solved in HCl, after which the determinations of R_2O_3, CaO and MgO were made in the usual way. Fe_2O_3 was subjected to colorimetric analysis by means of sulphosalicylic acid.

To determine Cr the sesquioxides were smelted with soda and saltpeter to oxidize Cr_2O_3. In the aqueous extract chromium was determined colorimetrically. The result was as follows: TiO_2—0.00%; Fe_2O_3—0.02; Cr_2O_3—0.00; BaO—0.00; MgO—0.88; CaO—5.40; Total—6.30%.

It seems natural to refer the MgO of the analysis to the remainder of spinel. As to CaO, it is hardly reasonable to suppose that it occurs in the composition of the β-Al_2O_3 inclusions only. In fact, in 100% normal calcareous β-alumina $6Al_2O_3.CaO$ there is only 8.38% CaO, and thus if the above supposition was correct, the preparation examined should contain up to 65% β-alu-

mina; as a matter of fact, under the microscope it shows but a scanty admixture of β-Al_2O_3 to the predominant corundum.

Now, two alternatives may be thought of: 1) the occurrence of the CaO also in the lattice of the corundum, which may be inferred from the lower refraction of this mineral, and 2) the highly calcareous character of the mineral we considered as β-alumina by analogy with the aluminate $2RO.5Al_2O_3$ found by Beliankin and Shumilo in the slag from smelting metallic manganese([1]).

On account of the reduced refraction of the corundum from Zestaphoni, we undertook a comparative investigation by immersion of N_0 in the same

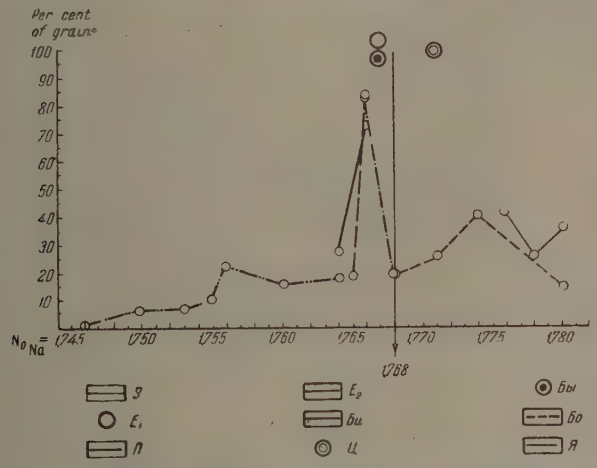


Fig. 1. Diagram of refraction for different corundums (N_0, Na). Materials obtained by immersion. *З*—artificial corundum, colourless, from Zestaphoni slag, No. 50; E_1—artificial corundum, colourless, obtained by A. G. Elisseev, No. 94; *П*—the same, vitreous transparent monocrystal, obtained by S. K. Popov; E_2—the same, brownish-red, obtained by A. G. Elisseev, No. 388; *Би*—natural corundum, India, Byrma (Redi), pink (ruby), No. 4100; *Ц*—the same, Ceylon, light bluish-green (sapphire), No. 30378; *Бы*—the same, the Urals, the Byzovaya river, crimson, in thin-section light-pink, No. 22675; *Бо*—the same, the Urals, the Borzovka river, grey; *Я*—the same, Yakutia, the Chainut river, crimson, in thin-section pink, No. 39861.

Na-light in a number of other corundums, both natural and artificial. As a result, the following curious circumstances have been brought to light: 1) variations in the refraction constant are characteristic also of other corundums, though in a lesser degree than in those from Zestaphoni; 2) the $N_0 = 1.768$—1.769 value given in text-books for pure α-Al_2O_3, exceeds the real value by no less than 0.003; 3) the higher refraction values of corundum may be accounted for by the presence in its lattice of foreign substances. In the particular case of pink varieties (rubies) such a substance solved in α-Al_2O_3 is Cr_2O_3 which is present in rather considerable amounts in both artificial and natural rubies.

All these data being of interest for the mineralogy of corundum, we give in the following a brief summary of this part of our works, too.

As may be seen from the explanatory text to the graph (Figs. 1 and 2), we have studied on the whole 8 separate cases of corundum besides that from

Zestaphoni; out of these three are artificial and five natural ones. As in the case of Zestaphoni, N_0 was measured each time in 50 grains and the result is given in the diagram (Figs. 1 and 2) in per cent.

Artificial Corundums. *II*. A monocrystal obtained by S. K. Popov by the improved method of Verneuille, the initial material used being ammoniacal aluminium alums. A vitreous transparent colourless variety. According to chemical test it is quite free from any iron or chromic oxides as well as from lime, magnesia, and alkalies. Nevertheless, as shown by line *II* on the graph of Fig. 1, the refraction, N_0, is not quite constant, but varies from 1.764 ± 0.002 (28% grains) to 1.766 ± 0.002 (72% grains). The mean N_0 value is 1.765 and we take it as a standard for a quite pure corundum free from any admixtures.

E_1. Electrocorundum, synthesized by A. G. Elisseev, No. 94 from the collection of Technical Petrography of the Institute of Geological Sciences of the Academy of Sciences. Vitreous, transparent, colourless. Refraction constant, $N_0 = 1.767 \pm 0.001$.

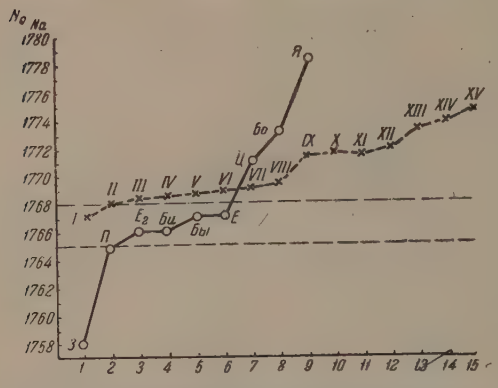


Fig. 2. Diagram of refraction for different corundums (N_0, Na). Mean values—the author's data; x——x Melczer's data.

E_2. Electrocorundum made by the same. Specimen No. 388 from the same collection. Red. Variation of N_0 from 1.766 ± 0.002 (81%) to 1.768 ± 0.002 (19%). Average $N_0 = 1.766$.

Natural Corundums. *Би*. Byrma (Redi) India. Light pink-coloured variety (light-coloured ruby). From the collection of the Mineralogical Museum of the Academy of Sciences No. 4100*. Variation of N_0 from 1.764 ± 0.002 (18%) to 1.766 ± 0.002 (82%). Average $N_0 = 1.766$.

Бы. Byzovaya, the Urals, No. 22675 from the same collection. Crimson corundum, in the thin-section slightly pink, pleochroic; $N_0 = 1.767 \pm 0.001$. Picotite and rutile inclusions. An analysis of this specimen gave the following results: TiO_2—0.56%; Fe_2O_3—0.21; Cr_2O_3—0.66; BaO—0.00; MgO—0.00; CaO—0.00; Total—1.43%. Referring the whole of TiO_2 to rutile, and the whole of iron oxide, after recalculating it to FeO (0.19% FeO), to picotite (0.59% $FeO.Cr_2O_3$), we obtain a residue of 0.26% Cr_2O_3 in the solid solution of corundum.

Curiously enough, practically the same figure of the Cr_2O_3 admixture to the solid solution of the Byzovaya corundum has been also obtained as a result of calculation according to the additive formula: $1.765\ (100-x) + 2.5x = 1.767 \times 100$, where x—percent Cr_2O_3 in the given corundum; 1.767—its N_0; 1.765—N_0 of pure corundum and 2.5—N_0 of chromic oxide. Here x is equal to 0.27%.

Ц. Ceylon. Bluish-green (sapphire). Specimen No. 30378 from the collection of the Mineralogical Museum of the Academy of Sciences. $N_0 = 1.771 \pm 0.001$.

Бо. Borzovka, the Urals. Grey corundum from kyshtymite. Collection

---

* The authors gratefully acknowledge their indebtedness to V. Kryzhanovsky, Head of the Mineralogical Museum of the Academy of Sciences, for his courtesy in placing at their disposal the above specimens.

of D. S. Beliankin. Rather intense variations of N_0, from 1.768 to 1.780$\pm$ $\pm$0.002. Mean N_0=1.773.

Я. Yakutia, the Chainyt river. Specimen No. 39681 from the collection of the Mineralogical Museum of the Academy of Sciences. Red variety, in thin-section pink. N_0 value variations from 1.776$\pm$0.002 to 1.780$\pm$0.002. Mean N_0=1.778. According to personal communication of S. V. Grum-Grzhimailo, the Chainyt corundum was analyzed by B. I. Fried who determined by the microchemical method 1.96% Cr_2O_3. Calculation according to the additive formula: 1.765 (100—x)+2.5 x=1.778$\times$100 shows, on the other hand, x=1.77%, a figure which coincides rather satisfactorily with that of B. I. Fried, considering the difference of material on hand.

All the above data referring to the refraction of corundum have been plotted, as said above, on the graph of Figs. 1 and 2. In Fig. 2 are given in addition the figures of refraction N_0 (Na) of 15 different corundums, according to Melczer, as well as two horizontals corresponding to N_0=1.768 (the figure known till now for pure α-Al_2O_3) and N_0=1.765 (new figure for pure α-Al_2O_3 found by the present authors).

As is known, the most detailed study of the refraction of corundum belongs to Melczer. His Nos. 1—10 are natural varieties—Byrma rubies and Ceylon sapphires; Nos. 11—15—red artificial corundums of Fremy. It is a matter for regret that Melczer does not give in his work any chemical analyses of the preparations studied by him.

In general, literary data on the chemistry of corundum are very scant. In Hintze's handbook (vol. 2, 1915) we find only the Fe_2O_3 content as determined by Pfeil (1901) in three Ceylon sapphires: 0.92, 0.97 and 1.05, and in two rubies from Byrma: 0.81 and 1.00. In a more recent work by J. O'Leary and J. Papish ([4]) it was shown that, according to older authors (Fremy, Wöhler, Kraatz-Kaschlau, Doelter and Leitmeier), no more than traces of chromium are present in natural rubies. O'Leary and Papish themselves made a quantitative determination of Cr_2O_3 in 5 different specimens with the following results: 1) Mysore, India, 0.244, 0.250; 2) the same, 0.237, 0.228; 3) the Urals, 0.174, 0.177: 4) the Transvaal, 0.190, 0.191; 5) North Carolina, 0.99, 0.102.

Our data stated above point to the fact that natural rubies may contain even more considerable amounts of chromic oxide, almost up to 2%, as we see in the dark crimson corundum from Yakutia. As to Fe_2O_3, to judge from our data obtained for the Byzovskaya and Yakutia corundums, it is doubtful whether it plays any considerable part in the composition of rubies.

As to the CaO content in the Zestaphoni artificial corundum, which we suppose to be rather considerable, this assumption requires further confirmation and discussion.

Received
6. XII. 1940.

REFERENCES

[1] D. C. Белянкин и И. М. Шумило, Тр. Петрограф. ин-та, вып. 13, 241 (1938). [2] C. Hintze, Handbuch der Mineralogie, 2 Abt. (1915). [3] Melczer, ZS. f. Krist. u. Miner., **35**, 561 (1902). [4] J. O'Leary and J. Papish, Amer. Miner., **16**, No. 1, 34 (1931).

Translated by W. Gurian.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

GEOLOGY

ON THE FORMATION OF INTRUSIVE SHEETS

By J. K. DZEVANOVSKY

(Communicated by V. A. Obruchev, Member of the Academy, 21.XII. 1940)

Bedded veins called also sills represent one of the comparatively often encountered morphological types of the intrusions of magmatic rocks.

The formation of such veins is confined chiefly to the platform regions characterized by horizontally lying or slightly undulating beds of sedimentary rocks, or else to transitional regions in which the beds underwent inconsiderable dislocations. In folded regions, however, such types of intrusions are encountered only as exceptions. The mechanism of formation of intrusive sheets is interpreted differently by various authors. Some of them ascribe a passive rôle to the intruding magma, whereas another group of investigators believe these intrusions to be the result of active motion of magma which disrupts the beds of sedimentary rocks along the planes of stratification and in general in all weakened directions.

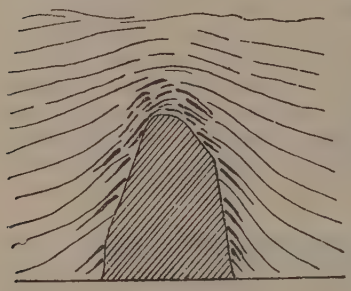


Fig. 1.

The author of the present paper investigated the eastern border of the Siberian platform where intrusive sheets of basic rocks of the gabbro-diabase type are widely developed. These rocks are beautifully exposed, this permitting in some exposures an observation of all the phases of their development, beginning with the dyke phase and ending with completely formed intrusive sheets to be made.

The results of these observations are dealt with below. It is known that vertical fissures (open and closed as well), a cover of sedimentary rocks and, finally, a magmatic basin are required for the formation of intrusive sheets. Through these fissures the magma is squeezed out to higher horizons of the lithosphere and overcomes during its motion the resistance of enclosing rocks. The magma moves also in the case of the fissure being blind in the upper part; here the motion may proceed in two directions: if the magma somehow retains its upward motion, then the diapir structures are formed; on the other hand, a sideward motion of magma brings about the formation of sheet intrusions. Fig. 1 shows one of such dykes (the river Belaya, the right tributary of the Aldan) which has partly pierced the cover made up of sedimentary rocks.

When the magma moving under a considerable pressure encounters beds of sedimentary rocks which split with greater ease along stratification (or in general along weakened zones, such as a border of two different beds), than against it, the magma experiences a sideward motion and forms intrusive sheets. During this motion the magma must overcome the weight of overlying rocks and those strains which appear in them in the process of intrusion.

This point is illustrated by Fig. 2 (the river Yudoma, the right tributary of the river May), in which it is seen that primarily the magma motion was directed against the stratification and along an inclined fissure, but having reached some zone of weakness the magma rushed along it and formed here a sheet intrusion.

Fig. 2.

When the magma moves inbetween beds of sedimentary rocks, the latter are split non-uniformly, this depending in every particular case upon a number of factors (the composition of rocks, degree of stratification, fissility, etc.). It is seen in Fig. 3 that the intrusive sheet coincides in some places with the stratification and dislocates it in others, forming in the latter case swells. In the case of small vertical fissures being present, the magma fills them and forms higher the second deposit, etc. An example of such composite deposits has been described by S. V. Obruchev for the Tungus basin ([1]) and has been observed by the present author in the region of the lower stream of the river Oka (the left tributary of the Angara). In this figure is also shown a similar second deposit which experienced no further development due, perhaps, to its insignificant thickness. Here in the roof of this second deposit may be seen a certain bend of beds caused by the pressure of the moving magma.

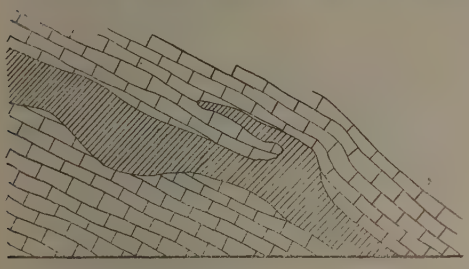


Fig. 3.

A similar underdeveloped sheet intrusion is seen in Fig. 4. Here the intrusion cuts the bed under a very small angle with respect to stratification and tends to acquire the direction of stratification at the uppermost part of the outcrop. In the same outcrop, near the head part of the intrusion, the beds of enclosing rocks are strongly warped, this being an evidence of the magma motion under a pressure which in the case under consideration did not overcome the weight of the overlying bed and the resistance of rocks.

Thus, from these observations it follows that during the process of formation of intrusive sheets the magma intruded under a great pressure primarily through fissures not coinciding with stratification, but later, under favourable conditions, following it.

It should be mentioned that the injection of magma under pressure is capable of forming only comparatively small bodies. An example of the formation of very big intrusive sheets may be found in the paper of Loewinson-Lessing on traps of the Eastern Siberia ([2]). This investigator believed the formation of sheets intrusions to be the result of a simple exchange of matter. The split off masses of sedimentary rocks submerge, and cavities thus formed are filled with magma. In the case of this splitting off taking place not

through one fissure along stratification, but through several such fissures, there appear many-storeyed intrusive sheets.

Therefore here the injection of magma occurs owing to a simple hydrostatic exchange of places. It is of interest to discuss for some length the values of pressure of the intruding magma and accordingly of the stresses needed for a certain uplift of the overlying sedimentary bed.

The majority of the intrusions of the mentioned part of the Siberian platform rest at a comparatively small depth. When evaluating the size of a possible cover which was uplifted by the injected body, figures of the order 1000—3500 m are obtained.

Simple hydrostatic pressure caused by the over-lying bed increases approximately at 280 atm. per 1 km ([3]), i. e. for the depth of 1—3.5 km the pressure should be 280—1000 atm. During the sheet intrusion of magma it has to overcome besides this pressure also the resistance of rocks, the value of which differs greatly for various rocks. Thus, for instance, the tensile strength of limestone equals 70 kg/cm^2, while that of sandstone is 80 kg etc.; these figures refer to normal pressure conditions. At a depth these values should be greater as a result of a change in the viscosity of rocks. In the cases of the intrusion occurring along the plane of contact of lithologically different beds, the tensile strength should be smaller.

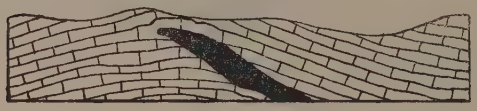


Fig. 4.

At any rate, taking into consideration only these values without accounting for a number of other factors, we are also able to have some judgment as to that pressure, under which the magma is «driven» into bedded rocks in the horizontal direction.

Thus, an analysis of the character of contacts of intrusive masses with the enclosing rocks in the region under consideration leads us to conclude that the intrusion of these masses occurred under a great pressure, differing in this from analogous formations of the central parts of the Siberian platform, which, according to Loewinson-Lessing intruded by means of a simple hydrostatic exchange of places.

All-Union Institute of Geology.
Leningrad.

Received
25. XII. 1940.

REFERENCES

[1] С. В. Обручев, Бюлл. Моск. о-ва естествоисп. (геология), VII, вып. 1—2.
[2] Ф. Ю. Левинсон-Лессинг и др., Тр. СОПС АН, серия сиб., вып. 1 (1932).
[3] П. Н. Кропоткин, Сов. геол., № 9 (1940).

Translated by P. Rappoport.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

GENETICS

ON THE ORIGINATION OF OBLIGATE HETEROZYGOSITY

By J. M. OLENOV and J. S. KHARMATZ

(Communicated by I. I. Schmalhausen, Member of the Academy, 30.XII.1940)

In the autumn of the year 1937 we studied with the $\frac{Cysp}{L^2}$ method the genic composition of the second chromosome in wild *Drosophila melanogaster* population; the flies were secured from a factory of fruit preserves at Uman (Ukraina, Kiev region). The population numbered no less than two to three hundred thousand flies. Analysis was made of 1613 second chromosomes(1). In 1256 chromosomes free of lethal genes we have found, along with other visible mutations, in 9 instances a recessive gene effecting a marked increase in the breadth of the wing together with an indenture in the inner side of the eye (due to the absence of a group of facettes). In some of the strains a rarely occurring reduction of the eyes was observed. Moreover, the same gene was found to cause thick groups of bristles to appear close to the inner side of the eye. In flies homozygous for this gene (we designate it as *M*5) viability is reduced to such an extent that, as in the case of lethal genes, the gene cannot be retained unless heterozygotic breeding is applied. On verification the 9 strains proved to be identical, *M*5 lying to the left of *dumpy* (its locus has not been more exactly determined).

While identifying some of the lethals in the same population we happened to observe the following phenomenon. Some of the lethals when crossed produce besides *Cy* also *M*5 flies. It likewise may occur that two strains, when intercrossed, yield in their progeny *Cy* flies only, whereas the two being crossed with a third strain, they produce both *Cy* and *M*5 flies. This fact suggested us the idea to cross with the *M*5 strain the remaining lethals of the population we had at our disposal. Among the 218 lethal bearing chromosomes, 14 were found to include *M*5. Hence the concentration of this gene among the lethal-bearing II chromosomes of the population is $6.4 \pm 1.6\%$, whereas among chromosomes that are free of lethal genes, it amounts only to $0.7 \pm 0.3\%$ (9 out of 1256). Diff. $= 5.7 \pm 1.6\%$.

In all the population was found to contain 357 lethal genes. The gene *M*5 in the checked 218 strains having been brought into evidence 14 times, it may be inferred that among the other 139 lethal-bearing chromosomes 9 chromosomes must have contained this gene; in all 23 (14+9) of the lethal-bearing chromosomes should have possessed the *M*5 gene. In the chromosomes free of lethals the *M*5 gene was found but 9 times. Thus, in the population studied more than $^2/_3$ of the II chromosomes containing the *M*5 gene contain lethals.

The accumulation of lethal genes in the *M*5 gene bearing chromosomes of

the wild population evidently represents the initial stage of the process that leads to the origination of obligate heterozygosity. In 1918 Muller(2) pointed out that such a process must exist if a useful factor is acting as a lethal in homozygous condition. In other words, it is only in its heterozygous condition that the gene heightens the viability, whereas in its homozygous state it acts as a lethal.

No doubt, laboratory experiments permit to obtain but a rough idea of the viability of the mutants in nature(3). Nevertheless, we made an attempt to study the viability of flies heterozygous for the *M*5 gene, expecting to find in these experiments some data speaking in favour of the above-mentioned viewpoint. We have already (1) mentioned on another occasion the results of the experiments here described, which make us believe that under certain conditions, common in a wild population (overpopulation), the *M*5 gene, when heterozygous, actually undergoes a most intensive positive selection.

Further data referring to the genic composition of wild populations were obtained in the course of the summer 1938(4). This time also the Uman population was analyzed (the flies were secured from the same factory as in 1937),as well as Crimea populations found in Simferopol, and in Bobrov. The analysis of the 1938 Uman population gave the following results. Out of 1324 II chromosomes studied 978 were found to be free of lethal genes and 2 of them proved to contain the *M*5 gene. As regards the 346 II chromosomes with lethal genes, the *M*5 gene was brought into evidence in 4 strains. Thus, in 1938 as well as in 1937 two thirds of the Uman population II chromosomes bearing the *M*5 gene were found to bear lethals. From another point of view, however, the 1938 Uman population differs markedly from that of 1937. In the latter, among the 1613 chromosomes checked the *M*5 gene was found (approximately, see above) in 32 instances, i. e. in $2.0 \pm 0.3\%$ of the chromosomes. In the 1938 population the *M*5 gene has been found among 1324 chromosomes 6 times in all; i. e. it has been brought into evidence in $0.5 \pm 0.2\%$ of chromosomes. Diff. $= 1.5 \pm 0.4\%$.

In 1937-1938 at the period of decrease in the Uman population the general concentration of visible mutations was increased, whereas the lethals remained at about the same level. This difference was due to the fact that the mutational process in the Uman population occurring at a high rate, the grade of inbreeding attained at the period of number decrease sufficed only to paralyse the increase in the concentration of lethals, while the number of visible mutations in the population continued to increase. Under similar conditions the concentration of the *M*5 gene, which similarly to the lethals is eliminated when homozygous, should have considerably decreased, since in autumn 1937 it was much higher than that of any of the lethal genes. Moreover, the decrease in the number of the strains possessing the *M*5 gene, due to a higher grade of inbreeding, could not be compensated by a repeated appearance of this mutation, which is of very rare occurrence. This is shown by the fact that about $^2/_3$ of the strains owning the *M*5 gene are affected with lethals; the conclusion therefore is that the process of accumulation of lethals in the *M*5 bearing chromosomes must be of long standing, the more so as *M*5, as found in the studies made of its locus, does not inhibit the crossing-over at any point of the II chromosome. That the normal allelomorph *M*5 is not among the number of frequently mutating genes is corroborated by the fact of this mutation never having come to our observation in our studies of the mutational process in the Uman population. Thus, the *M*5 gene evidently exists since a long time in the Uman population (or else in other populations, given that it passed from those into the Uman population), and its concentration is subject to seasonal variations according to the variations in the grade of inbreeding.

The long-standing existence of the *M*5 gene in the Uman population (or in those from which it penetrated into the Uman population), due to its positive selective action in heterozygous condition rather than to a qualitatively peculiar mutability of a certain population or a genetico-automatic process, makes it highly probable that the same gene exists in other geographically distant *Drosophila melanogaster* populations. Indeed, when studying the Simferopol population we have found the *M*5 gene in 3 of the 426 II chromosomes analyzed. We failed to find the gene in the Bobrov population, but this negative result is not conclusive, the number of the chromosomes studied (215) being clearly insufficient for an analysis of the problem. Of the three *M*5 strains brought into evidence in the Simferopol population, 2 proved to contain lethals; whereas the percentage of lethals as related to the general number of the II chromosomes analyzed amounted to $20.6 \pm \pm 2.2\%$. The chromosomes bearing the *M*5 gene being in both populations similarly affected with lethals though strongly differing in their mutability([4]), it may be assumed that either the difference itself is of recent origin, or else that the *M*5 gene, the spreading of which is due to natural selection, has but recently appeared in one of the populations compared. At any rate, the fact of the *M*5 gene having been brought into evidence in two geographically distant populations should be taken to mean that the process of differentiation of the genic compositions of chromosomes due to the presence of *M*5 embraces a large area*.

In this case, however, the process of differentiation of chromosomes may perhaps have no considerable further development (we meet with it in our days in its initial stage, a large number of the *M*5 bearing chromosomes being still free of lethals), since at the same time a contrary process of selection which heightens the viability of the *M*5 homozygotes is going on. We came to infer the existence of such a process on account of the data obtained for the only Simferopol *M*5 strain that was free of lethals. In this strain (No. 120) contrary to the other 2 Simferopol and all Uman *M*5 strains, the phenotype of the homozygotes was less sharply outlined than it is usually the case (the wing being of normal breadth); their viability was likewise found to be markedly heightened (it was possible to breed the No. 120 strain in a homozygous state). It should be noted that the peculiarities of this strain were found to be dominant.

In our opinion the above data permit of the following conclusions: the process of origination of obligate heterozygosity under the aspect which Muller gave it ([2]) may be brought into evidence in wild *Drosophila melanogaster* population**. Thus, the farreaching consequences of this process involving alteration in the number of chromosomes proper to the species, are likely to be realized in nature.

State Roentgenological Institute.
Pokrovsky Pedagogical Institute. Leningrad.

Received
30. XI.-1940.

REFERENCES

[1] J. M. Olenov and J. S. Kharmatz, C. R. Acad. Sci. URSS, XIX, No. 5 (1938). [2] H. J. Muller, Genetics, **3** (1918). [3] J. M. Olenov and J. S. Kharmatz, C. R. Acad. Sci. URSS, XV, No. 2 (1937). [4] J. M. Olenov, J. S. Kharmatz et al., ibid., XXIV, No. 5 (1939). [5] R. A. Masing, ibid., XXIII, No. 8 (1939).

* Lacking data necessary for its solution we do not discuss here the question as to whether the particularly widespread occurrence of the *M*5 gene is due to the gene's repeated origination (which is fully probable even in case of a low mutability of the normal allelomorph) or whether it is effected by selection.

** Besides the *M*5 gene, we found in the 1938 Uman population another gene distinctly negative in its effect on the viability in the homozygote and occasioning a process of differentiation in the chromosomes' genic composition. The four chromosomes, in which the gene mentioned was brought into evidence, all contained lethals ([5]).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PLANT PHYSIOLOGY

SLAG FROM CHALCOPYRITE TRIED UNDER HEMP

By N. N. SHEVCHENKO

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 2.I.1941)

In the list of chemical elements known to be essential for the nutrition of plants new names appeared recently alongside of H, O, C, N, S, P, K, Ca, Fe and Mg. In foreign literature, for instance, very much attention has been devoted to copper, to its rôle in the life of cultivated plants and of animals[1–11]. In this country the possibilities of using copper as a fertilizer under grain crops have been explored at the Institute for Marsh Land Cultivation.

While the costly blue vitriol has been tried by the foreign workers in their experiments, we over here have attempted to replace it by industrial waste products containing from 0.13 to 0.15% of copper and whose store in this country can be estimated approximately as 5 million tons. At this point it may as well be said that there are better reasons to consider copper as a microelement indispensable for plants to grow on peat soils, rather than suspect it to cause morbid phenomena in the grains cultivated on marshy land (the «white pest» reported in German technical literature). Most cultivated plants do very well with NPK on peat soils. And if slag from chalcopyrite is given in addition (500 kg per ha), the yield is even apt to increase 2 or 3 times. What I have found in my investigation of the matter is this.

1) The effect of copper on plants is that of a microelement. With copper pyrite slag in the supply the plants stored more chlorophyll in their leaves and developed more intensively. Those without fertilizers had only 1.64% of chlorophyll in their leaves, as against 2.69% with NPK and 3.15% with NPK+slag.

2) Growth in length is also favoured by copper. Hemp plants, when grown without fertilizers, had reached a height of 120 cm, while they measured 180 cm with NPK, and 425 cm with NPK+slag. The respective figures for the average internode length were 19—22 and 30—33 cm. Increase in the length of internodes is indeed a very important circumstance, since with longer internodes the quality of fibre is better.

3) Granted an equal density of stand hemp plants will produce thinner stems when chalcopyrite slag is added to NPK than when NPK is given alone. And it is the thinner and longer stems that yield more fibre, as Table 1 will show. In this table we see the yield of fibre increase with the ratio of stem length to diameter.

4) The growing period of hemp plants is reduced by 8 or 10 days when copper as chalcopyrite slag is introduced into the soil. This makes it possible

to grow Italian hemp for seed even in the province of Chernigov. The Italian hemp grown there in 1939 on NPK+slag gave 3 centners per ha of completely ripe seeds. And what is more, these seeds were of higher quality and of higher absolute weight as compared to those obtained from the plants grown without copper.

In the case of Italian hemp the period during which staminate plants separate out of the pistillate is a long time. It lasts about 40 days, and those of the staminate plants which first come to flower are liable to lodge. A considerable loss of yield is thereby entailed. The ratio of lodging plants depends, as is obvious from the following figures, upon the conditions of nutrition: 1.9—2.5% with NPK + slag; 4.6—5.0% with NPK; 7.0—8.0% without fertilizers. Here too, the effect of copper is to increase the commercial value of the yield. Copper brings about this effect by shortening the period of male plant separation. Flowering sets in earlier and the staminate plants have stronger stalks.

Table 1

Average Figures from 100 Analyses Made in 1940

Stem length in cm	Average diameter of stem in mm	Ratio of stem length to diameter	Yield of fibre in %
205	13.0	158	13.87
178	8.5	210	14.10
272	11.0	247	14.72
268	9.9	270	14.6
190	6.2	307	14.91
186	5.6	333	15.68
203	5.5	369	16.25
164	4.2	390	19.7
162	3.9	415	19.21
171	4.0	428	19.36
165	3.7	446	20.34
199	4.2	473	21.45
193	4.0	483	22.23
150	2.0	750	24.6
233	3.0	777	26.0
79	1.0	790	30.15

Note. For stem length was taken the part above the cotyledons. The average diameter was obtained by dividing the sum of diameters measured in the upper and lower part of each internode by the number of measurements. For as many as 580 plants so measured it was found that nearly as accurate figures for the average diameter of the whole stem would have been obtained by measuring the diameters in the middle of the 5th and the 6th internode only and dividing their sum by two.

5) In my experiments conducted in 1939 and 1940 I found that with copper in their nutrition the hemp plants gave more straw and more fibre. The quality of the fibre was better too, although up to the present date it has been asserted by practical workers and in literature that hemp plants, when grown on peat soils, are bound to yield a fibre of very poor quality. This point is cleared up by the data presented in Table 2.

Table 2

Hemp variety	Soil fertilization	Yield of dry straw in centners/ha	Extra yield in centners/ha	% to No.1	Yield of fibre	
					in %	in centners/ha
Italian	Chalcopyrite slag	88.2	—	100.0	17.0	12.44
	NPK	113.5	25.3	128.6	6.5	5.48
	NPK+farm manure	110.0	21.8	124.7	9.0	6.34
	NPK+chalcopyrite slag	164.5	76.3	186.5	19.8	26.64

Indeed, we see from this table that even when sufficient amounts of nitrogen were secured in the soil by adding NPK alone or with farm manure, the yield of fibre was poor on account of its low quality. Most of the bast gave tow. This great disadvantage can be eliminated by the addition of waste products containing copper. Another confirmation is furnished by the data of technological analyses. Once I found the strength of the fibre to be 21.7 instead of 5.8 when chalcopyrite slag had been added to NPK in the supply. Another time the plants grown with NPK only have a fibre whose strength was 16.5; thickness, 8 mm. But if the slag had been given in addition, the strength was 23.1; thickness, 6 mm.

Table 3

Variety	Yield of dry straw in centners/ha	$\pm m$, average error	$P\%$, accuracy of experiment
Italian	157.0	1.03	2.18
Ferraponia . .	174.0	1.39	2.56
Caucasian . .	156.6	0.86	1.90
N. Severskaya	106.6	1.14	3.58

The figures of straw yield are presented in Table 3.

No less representative are the data obtained by using the chalcopyrite slag under the Middle Russia variety of hemp (Table 4).

Table 4

Fertilizers	Yield of dry straw in centners/ha	Extra yield in centners/ha	% to the minus fertilizer set	Yield of seed in centners/ha	Extra yield in centners/ha
Without any	26.66	—	100.0	7.73	—
NPK	59.21	32.55	222.0	11.36	+3.63
NPK+slag	115.4	88.74	432.0	14.0	+6.27

To sum up, the slag from chalcopyrite is a very important fertilizer for hemp grown on peat soils. Using it increases the total yield of the plant by 86 to 332% and the quality of its fibre by 40—274%. Attempts to apply it on commercial scale were also crowned with success. The collective farm Dobrobut, Tupichev district of the Chernigov province, had 6 ha of bog soil under hemp and each gave 130 centners of straw on the average. And when ploughing 35 cm deep, 217 centners per ha were obtained. Another collective farm, Stalin, in the Gorodniansk district of the same province, planted 40 ha of bog soil with Italian hemp and collected 120 centners per ha of straw. The two farms were admitted with their hemp produce to the All-Union Agricultural Exhibition of 1939.

Agricultural Institute.
Kharkov.

Received
6. XII. 1940.

REFERENCES

[1] C. Rumm, Ber. d. D. Bot. Ges., **11** (1938). [2] B. Frank und F. Kruger, ZS. f. Pflanzenkrankheiten, 5 (1895). [3] A. Zucker, Beitrag. z. direkt. Beeinflüssung der Pflanzen durch die Kupfervitriolkalkbrühe, Stuttgart (1896). [4] L. Hiltner, K. Scharrer und W. Schropp, ZS. f. Pflanzenernährung u. Düng., **32**, No. 3/4 (1933). [5] Br. Tacke, Mitt. Ver. Förd. der Moorkultur. 12 (1929). [6] W. Freckmann, Erschliessung und Bewirtschaffung des Niederungsmoores (1921). [7] H. Kannenberg, Jahrb. d. Moorkunde (1933). [8] A. Densch und Hunnius, ZS. f. Pflanzenernährung u. Düng., A, III (1924). [9] B. Sjollema, Biochem. ZS., **267**, 1—3 (1933). [10] W. Smith, Dissert. Wageningen (1927). [11] J. Hudig und C. Meyer, ZS. f. Pflanzenernährung u. Düng., **A**, 8, No. 1 (1926).

Translated by D. Rakhmanov.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PFLANZENANATOMIE

ZUR FRAGE ÜBER DIE ENTWICKLUNG DES BLATTES VON *THEOBROMA CACAO*

Von E. R. HÜBBENET

(Vorgelegt von A. A. Richter, Mitglied der Akademie, den 29.XII.1940)

Bei manchen tropischen Pflanzen mit grossen Blättern erscheinen die neuen Blätter in Büscheln einige Male im Jahre. Ihre Eigentümlichkeit besteht in dem langsamen Wachstum, ihrer Lage auf dem Zweige (die Blattspreiten hängen nach abwärts), ihrer roten Färbung und Durchsichtigkeit. Infolgedessen haben die mit jungen Blättern behängten Bäume ein eigenartiges Aussehen. Ein ähnliches Bild kann man bei den Sämlingen und erwachsenen Exemplaren von *Theobroma Cacao* in den Gewächshäusern des Botanischen Instituts der Akademie der Wissenschaften der UdSSR beobachten. Nach unseren Beobachtungen im Laufe des Jahres 1934 erreichen die im Frühjahr und Sommer erscheinenden Blätter von *Theobroma Cacao* während einer Entwicklung von etwa einem Monat (25—30 Tage) eine umfangreichere Grösse; die im Herbst erscheinenden dagegen wachsen langsamer (80—90 Tage) und erreichen dabei eine geringere Grösse. Zu Anfang beim Heraustreten aus der Knospe ist das Blättchen von nicht über 0.2 cm Länge, hellgrün gefärbt und mit der Spitze nach aufwärts gewendet. Im weiteren verliert die Blattspreite ihre grüne Färbung, wird fast durchsichtig, am häufigsten durch Anthozyan rot gefärbt, manchmal farblos und hängt bis zur Vollendung des Wachstums des Blattes mit der Spitze nach abwärts. Bei einjährigen Sämlingen erreicht die Blattspreite verhältnismässig eine unbeträchtliche Länge (11—18 cm), bei zweijährigen ist sie grösser (20—32 cm), bei erwachsenen Bäumen 40 cm. Während der Entwicklung ändert sich allmählich die Färbung des Blattes; es verschwindet das Anthozyan, es erscheint das Chlorophyll, und das Blatt wird grün, undurchsichtig und nimmt eine mehr oder weniger horizontale Lage ein.

Wie aus dem dargelegten ersichtlich, entwickelt sich die Blattspreite langsam, und es war daher leicht zu verfolgen, wie die Differenzierung des Parenchyms in derselben vor sich geht und in welchem Zeitpunkt ihrer Entwicklung die Chloroplasten erscheinen.

Über die Frage der Entwicklung der Blattanlagen am Vegetationspunkt existiert eine umfangreiche Literatur ([1],[2],[3],[4],[6]). Wir haben uns auf die Untersuchung schon ausgebildeter Blattspreiten beschränkt. Zu diesem Zwecke wurde ein Zweig des Kakao-baumes, auf dem sich 8 Blätter von verschiedenem Alter entwickelten, gewählt. Zur Charakteristik der Grösse und Färbung der untersuchten Blätter teilen wir folgende Angaben mit:

	Länge (cm)	Breite (cm)	Färbung
I oberes Blatt . . .	2	0.6	Rot, durchsichtig
II » » . . .	5	1.5	» »
III » » . . .	10	4.0	» »
IV » » . . .	15	6.0	» »
V » » . . .	16	6.5	» »
VI » » . . .	24	10.0	Blassrosa-grünlich
VII » » . . .	28	11.0	Blassgrün, halbdurchsichtig
VIII » » . . .	31	14.0	Grün, undurchsichtig

Die rote Färbung der oberen Blätter wird durch die Anwesenheit von Anthozyan in den Zellen der oberen und unteren Epidermis, welches mit dem Alter des Blattes allmählich verschwindet, bedingt.

Nach den Literaturangaben (6) vollendet bei den Blättern mit netzartiger Nervatur die obere Epidermis ihre Entwicklung früher als die untere. Bei den parallelnervigen Blättern vollenden beide Epidermen ihre Entwicklung gleichzeitig mit dem Mesophyll. In den jungen Blättern der Kartoffel (7) vollendet das Schwammparenchym sein Wachstum früher als das Palisadenparenchym, in Zusammenhang damit erscheinen in demselben auch früher die ausgebildeten Plastiden. Wie aus dem folgenden ersichtlich, stimmen unsere Ergebnisse mit den Angaben über die Kartoffelblätter überein.

Auf der schematischen Abbildung der Tabelle ist der Querschnitt durch die Blattspreite des oberen jüngsten Blättchens dargestellt. Die Zeichnung des Umrisses wurde bei schwacher Vergrösserung (Ok. 4, Ob. 2, Syst. Leitz) ausgeführt. Man sieht den Hauptnerven mit dem von ihm entspringenden Seitennerven; die eine Hälfte der Blattspreite ist ganz, die andere nur zum Teil abgebildet. Die obere und untere Epidermis ist dicht mit Drüsen- und Sternhaaren besetzt, die hauptsächlich an den Stellen der Leitbündel, wo die Blattspreite dicker ist, sich befinden. Bei völligem Mangel einer Differenzierung des Parenchymgewebes, welches aus 3 vollkommen gleichartigen Schichten dichtgelegener Zellen besteht, treten die Stellen der Leitbündel auf dem Querschnitt in Form von Gruppen kleinerer Zellen deutlich hervor. Makroskopisch sind die Nerven auf der Unterseite des Blattes schon bei seinem ersten Erscheinen, wenn der Blattstiel noch nicht sichtbar ist und die Blattspreite nur 0.2—0.3 cm beträgt, deutlich ausgeprägt.

Der Reichtum an Schleim in der Epidermis und in den grossen Schleimzellen erschwerte die Anfertigung von dünnen Schnitten aus lebendem Material, so wurden die übrigen Blätter an Mikrotomschnitten (aus fixierten und paraffinierten mittleren Teilen der Blattspreiten angefertigt) untersucht.

Auf den Figuren II, V, VI, VII und VIII der Tabelle sind die Querschnitte durch die entsprechenden Blätter dargestellt*. Die Figuren der Blätter III und IV sind nicht angeführt, da ihr Bau demjenigen des Blattes II völlig ähnlich ist. Wie aus den Figuren ersichtlich ist, sind bei den Blättern bis zum VI einschliesslich in allen Zellen die Kerne gut erkennbar. Die Zeichnung wurde mittels des Ok. 2, Ob. 6, Syst. Leitz ausgeführt; bei dieser Vergrösserung konnte man die Plastiden vom VI Blatt an beobachten, wobei sie nur im Schwammparenchym deutlich zu sehen waren, während in dem Palisadenparenchym wie vorher die Kerne deutlich hervortraten. In dem VII und VIII Blatt waren die Plastiden in beiden Parenchymen gut sichtbar, die Kerne jedoch konnte man nicht deutlich sehen.

In den ersten 4 Blättern (Fig. II) sieht man zwischen der oberen und unteren Epidermis 3 Reihen vollkommen gleichartiger Parenchymzellen und kleinere Zellen des Leitgewebes. In der oberen Reihe, aus welcher das Palisadenparenchym sich entwickelt, herrscht zuerst die Teilung der Zellen in

* Die Nummern der Figuren entsprechen der Ordnungszahl der Blätter, wobei das jüngste Blatt mit I, das nach seinem Alter darauf folgende mit II usw. bezeichnet ist.

senkrechter Richtung zur Epidermis vor, wodurch ihre Zahl sich in der ersten Reihe im Verhältnis zu der zweiten Reihe des Parenchyms verdoppelt. Durch Teilung aller drei Reihen der Parenchymzellen durch tangentiale Scheidewände, bilden sich 6 Zellreihen: 2 Reihen Palisaden- und 4 Reihen Schwammparenchym. Bei guter Beleuchtung findet man 9 Reihen Zellen im Blattparenchym: 3 Reihen Palisaden- und 6 Reihen Schwammparenchym. Die Blätter der Sämlinge haben dünnere Spreiten und nur 4—5 Reihen Parenchymzellen (1 Reihe Palisaden, 1 Reihe Leitparenchymzellen und 2—3 Reihen Schwammparenchym). Bei Blättern einjähriger Sämlinge, die während 8 Monaten einen sechsstündigen Tag erhielten, war das Parenchym schwächer entwickelt und wies nur 3—4 Zellreihen auf.

Fig. I, II, V, VI, VII, VIII

I—Querschnitt der Spreite des jüngsten Blattes (Ok. 4, Ob. 2); drei Reihen gleichartiger Parenchymzellen; II—Querschnitt der Blattspreite (Ok. 2, Ob. 6); drei Reihen des Parenchyms mit sich teilenden Zellen, in der ersten Reihe überwiegt die Teilung in vertikaler Richtung; V—man sieht 1—2 Reihen Zellen des Palisaden- und 4 Reihen des Schwammparenchyms; ebenso ist das Erscheinen der Luftgänge zu sehen; VI—man sieht 6 Reihen der Parenchymzellen; im Palisadenparenchym sind die Kerne, im Schwammparenchym die Chloroplasten zu sehen; VII—Chloroplasten sind in allen Zellen sichtbar; in der oberen Epidermis eine grosse Schleimzelle; VIII—man sieht 6—8 Zellreihen des Parenchyms und Schleimzellen.

Die Zellen des Schwammparenchyms stellen ihre Teilung früher ein und werden passiv durch die wachsenden Epidermis- und Palisadengewebe auseinandergerückt. Das erste Auftreten der Luftgänge beobachtet man beim V Blatt (Fig. V), das eine Länge von 16 cm erreicht hat. Am Anfang erfolgt das Wachstum der Blattspreite hauptsächlich durch Zellteilung und erst vom VII Blatt an (28 cm Länge) durch Streckung der Zellwände.

Ungeachtet dessen, dass schon im VI Blatte Chloroplasten erscheinen und kleine Luftgänge vorhanden sind, bleibt dasselbe noch durchsichtig, von blassgrün-rosa Färbung. Sobald aber vollständig ausgebildete Plastiden auch in Palisadenparenchym erscheinen und durch Trennung der Zellen des Schwammparenchyms sich die Luftgänge vergrössern, wird das Blatt zuerst halbdurchsichtig und blassgrün (VII Blatt) und verliert schliesslich, indem es in den Plastiden Chlorophyll anhäuft, die Durchsichtigkeit, wird grün (VIII Blatt) und sein Wachstum kommt damit zum Abschluss.

Pflanzenphysiologisches Laboratorium.
Leshaft Naturwissenschaftliches Institut.

Eingegangen
den 3. I. 1941.

ZITIERTE LITERATUR

[1] V. Deinega, Flora, **85**, 438 (1898). [2] A. Famintzin, Bot. Zeit., **33** (1875). [3] L. Flot, Rev. génér. de bot., **19**, 116 (1907). [4] F. Lange, Planta, **3**, 181 (1927). [5] U. Tetley, Ann. of bot., **50** (1936). [6] W. Stone, J. of agric. Res., **45**, 421 (1932).

Übersetzt von A. Gurewitsch.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PLANT MORPHOLOGY

FORMATION OF ORGANS IN WHEAT AND BARLEY WHILE ENTERING INTO THE LIGHT PHASE

By A. A. SAPEHIN, Member of the Ukrainian Academy

In one of my previous papers (1) I pointed out briefly the presence, at the basis of the wheat spike, of two scale-like formations set on passing from the vernalization to the light phase. But their actual number ranges from 3 to 5, and now that this period of development has been subjected by me to a closer investigation in barley and wheat, I am able to report some results which will clearly bring out the relation between the phasic contents of a growing stem top and the shape of the organs formed in this process.

Until the top of the stem has passed the vernalization phase, it forms leaf ridges which are beads circular in section (1) (Fig. 1) and will later on be transformed into leaves. And after the light phase sets in, the morphology of forming organs retains its outward appearance for several days (from 3 to 10, according to the variety and external conditions); the bead-like ridges reminding of leaf primordia, continue their growth. The new contents initiated by the light phase begins to accumulate under the old vegetative form, and an acting minimum is eventually reached, whereupon the formation of organs proceeds along new lines peculiar to the new phase: the top of the stem stretches up and widens, and spikelet ridges in the form of beads semicircular in section appear on it arranged in a definite order. This period as measured from the outset of light phase to the start of stem top elongation, was described by me as a preliminary phase to the formation of spikelets.

Fig. 1 shows a stem top on the 10th day after entering the light phase. The preliminary phase has come to an end and the elongation of the top is already well expressed. In 9 days that have passed several new ridges have made their appearance. The bead that is growing out to form the last leaf of the culm (*n*) began buldging at the outset of the light phase. Later on there appeared the beads 1, 2, 3, 4 and 5 (the latter appears rather often but not always). These will never turn into stem leaves under normal conditions.

3 or 4 days later we find the same top (Fig. 2) to have made further progress. It is now still longer and broader. The last leaf of the stem has markedly increased in size and so have the beads of the spike-like formations situated just above them. Spikelet ridges have begun swelling out of the 3rd, 4th and 5th beads (*k*).

A week or a fortnight later (according to the variety and the conditions of growth) young stamens can already be easily outlined and the bead-like ridges set during the preliminary phase will assume their ultimate scale-

like shape (Fig. 3). The largest of them will be the lowest, which was set first. The second scale from below is usually also a rather large size, and it is also an annular shape. These two scales have been known for a long time, but no correct interpretation has been given as to when and how they come into being([3],[4]). The 3rd and the 4th scales are inconspicuous, as is the 5th in

Fig. 1. Wheat; *n*—bead of the last stem leaf; *1*, *2*, *3*, *4*, *5*—bead-like tubercles of the scales; 110 ×.

Fig. 2. Wheat; *k* — spikelet tubercles; the rest as in Fig. 1; 110 ×.

case its formation has taken place. They are carried upwards with the base of the spike and sitting in it form small light-coloured processes.

The external spikelet scales (glumae) are not connected in their development with the above scales. They develop independently as a part of an organ forming out of the tissue whose contents is of the light phase nature. As a form corresponding to this particular contents the spikelet growing above the scale makes its development out of the tissue that is not yet determined finally to become a stem leaf. But the primordia of scale-like ridges belong to the vernalized parts of the tissue and so they are to a great extent determined for leaf formation. However, they become neither spikelets nor leaves and continue their existence as scales. This is probably because the physiology and biochemistry of the plant is essentially modified by its entering the light phase. Now the initial substances are used (partly and perhaps in tiniest amounts) to build up new materials, out of which the spikelets are made, while the materials required for the transformation of our bead-like ridges into normal stem leaves are no longer available in sufficient quantities.

Fig. 3. Barley; *g*—glumae; the rest as in Fig. 1; 55 ×.

The cells of the scales are soon vacuolized; they decrease in plasma and become transparent. It would seem as if they were not only deprived by the developing spikelets of new building materials, but even gave over part of

the old. The case is similar to what later on occurs to the stem top, which having entered the third phase of development ceases forming spikelet ridges and, not in a very long while, grows transparent, probably on account of the loss of a part of its plasma.

So we arrive at the conclusion that it is not their age that accounts for the presence of scale-like leaf primordia under the spikelets, as it has been supposed by Krenke (2). They should rather be interpreted in terms of phasic development and on the basis of their position in the system.

The character of organ formation in the first days of the light phase may often assist in determining the day when this phase started (with an accuracy of 1 to 3 days). In my previous note (1) I mentioned that in the case of wheat the new bud ridge appeared in the axil of a definite leaf. Just in which leaf did it appear, depended upon the variety. For the majority of wheat varieties this is usually the 5th leaf from above, if growth is made under normal conditions. By determining every day the place where the youngest axillary ridge is set it is possible, as soon as one will find the number of leaf ridges above this place to exceed that typical of the variety concerned by 1 or 2, to state that the light phase has made its start 2 or 3 days before, that the top of the stem is about to begin elongation and that in a week or so the first spikelet ridges will make their appearance. But it is also necessary to take into account the environmental conditions, especially the fluctuations of temperature. In the case of cold spring and a slowly developing variety the initiation of a ridge will take up about 3 days. In warm weather and for an early variety this term is only 1 or 2 days.

Received
17. XII. 1940.

REFERENCES

[1] А. А. Сапегин, Изв. Бюро биоотдел. Акад. Наук СССР. сб. «И. В. Сталіну—Академія Наук УРСР» (1940). [2] Н. П. Кренке, Циклич. теория старения и омоложения (1940). [3] O. Bonnet, Jrnl. Agr. Res., **53**, 6 (1936). [4] С. А. Александров, Баку (1939).

Translated by D. Rakhmanov.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PFLANZENBIOLOGIE

ÜBER DEN EINFLUSS DER INTENSITÄT DES KAMPFES UMS DASEIN ZWISCHEN DEN PFLANZEN AUF DEREN ENTWICKLUNG

Von W. N. SUKATSCHEW, korrespondierendem Mitglied der Akademie

Wie der Agronomie schon seit langem bekannt, blühen und fruchten einjährige Pflanzen in dichtständigen Kulturen gewöhnlich früher, als in undichtständigen. Ausserdem treten die einzelnen Phänophasen nicht nur früher ein, sondern auch ihre Dauer ist kürzer. Die speziell angestellten Versuche von Soczawa([1]) mit Senf, Flachs, Buchweizen und *Melilotus albus* Desr., sowohl wie diejenigen von Uspenskaja([2,3]) mit Buchweizen und Flachs und von Smirnowa ([4]) mit Flachs, *Agrostemma githago* und *Camelina sativa* haben dies bestätigt. Ähnliche, noch unveröffentlichte Ergebnisse erhielten meine Mitarbeiter E. N. Kalnin mit Flachs, Hanf, Buchweizen, *Apera spica venti* (*L.*) P. B. und *Bidens tripartitus* L., und N. O. Schingarewa mit *Bidens tripartitus* L. und *Matricaria inodora* L.

Somit beschleunigt ein intensiverer Kampf ums Dasein bei den genannten einjährigen Pflanzen deren Entwicklung und verkürzt die Dauer deren Phänophasen. Die auf der landwirtschaftlichen Versuchsstation Besentschuk gemachten Beobachtungen deuten jedoch darauf hin, dass bei Mais ein dichterer Stand der Pflanzen die Entwicklung verzögert.

Als Beispiel des Einflusses der Intensität des Kampfes ums Dasein bei zweijährigen Pflanzen können die im nachstehenden beschriebenen von mir mit *Trinia Henningii* Hoffm. im botanischen Garten der im südlichen Teil des Kursk Gebiets gelegenen Versuchsstation der Leningrader Universität «Less na Worskle» (Wald an der Worskla) durchgeführten Versuche dienen. Die aus in der Streletzkaja Steppe unweit von Kursk gesammelten Samen erhaltenen Sämlinge wurden 1937 in der Anzahl von 1500 Exemplaren auf eine Parzelle in Schachbrettordnung in Zwischenräumen von 3 cm von einander und 3 cm zwischen den Reihen ausgepflanzt; 500 Exemplare auf 5 Parzellen im Abstand von 10 cm in den Reihen und 10 cm zwischen den Reihen.

Im Jahre 1938 waren zur Blütezeit auf der dichtbestandenen Parzelle nur 531 Exemplare, d. h. 35.4%, auf den weniger dicht bestandenen dagegen 251 Exemplare, d. h. 50.2% der ursprünglichen Anzahl übrig geblieben. Dieses deutet in beiden Fällen auf einen sehr intensiven Wettbewerb um den Lebensunterhalt zwischen den Pflanzen. Dafür spricht auch der Umstand, dass auf allen Parzellen die am Rande stehenden Exemplare bedeutend kräftiger entwickelt waren, als die in der Mitte stehenden. Besonders scharf war der Wettbewerb auf der dicht bestandenen Parzelle. Auf letzterer blühten 154 Exemplare, d. h. 28.9%, auf der weniger dicht bestandenen 167 Exemplare, d. h. 70.1%. Aus der Zahl der erblühten Exemplare fiel ein bedeutender Teil auf die am Rande stehenden, denn sämtliche standen in Blüte. Von den innen stehenden Pflanzen blühten nur diejenigen, welche sich nächst den durch das Absterben eines Teils der Exemplare entstandenen Lücken befanden. Im

Herbst waren alle Exemplare, die geblüht hatten, abgestorben, doch die übrigen, welche nur eine Blattrosette entwickelt hatten, blieben am Leben und überwinterten gut.

Im Jahre 1939 wurde der Versuch nur auf der dicht bestandenen Parzelle fortgesetzt. Wiederum blühten nur die Randexemplare und ein Teil der inneren (nächst den Lücken) Pflanzen. Im Herbst starben sie ab. Der Rest (165) trieben keine Halme und verblieben im Stadium der Blattrosette.

Im Jahre 1940 blühten aus der Anzahl von 165 Exemplaren 101, von denen 80 auf die Randexemplaren und 21 auf die inneren entfielen. Diejenigen von ihnen, die zur Blüte kamen, starben im Herbst wiederum ab. Die übrigen 64 besassen nur Blätter und kamen lebend unter den Schnee. Es ist anzunehmen, dass sie in 1941 sämtlich, oder ein Teil von ihnen, blühen werden.

Somit lebt eine typische zweijährige Pflanze auf einer dicht bestandenen Parzelle bereits 4 Jahre und wird möglicherweise noch länger leben. Folglich hat also ein intensiver Kampf ums Dasein in diesem Falle nicht zu beschleunigter Entwicklung, sondern zu deren Verlangsamung geführt. Die Ursache davon muss in dem Wettbewerb um die Feuchtigkeit, nicht aber das Licht oder mineralische Stoffe gesucht werden. Dafür sprechen die Umstände: erstens, dass die Exemplare von *Trinia Henningii* mit Rosetten, deren in schmale Segmente geteilten Blätter sich 15—18 cm über dem Boden erhoben, gut belichtet waren, zweitens, dass ihnen durch den fruchtbaren Boden der Pflanzschule unzweifelhaft reichliche mineralische Nahrung gesichert war. Die Bestätigung dafür liefert der Versuch(5) mit *Aegopodium podagraria* L., die unter dem dichten Schirm des Waldes nicht blüht und vermehrt sich nur vegetativ, während auf Lichtungen ausgiebig fruchtet. Man hat immer geglaubt, dass dieses auf das bedeutende Dunkel unter dem Schirm des Waldes und Mangel an Licht für die Entwicklung von Blüten zurückzuführen sei. Als jedoch im Eichenwald auf kleinen Parzellen die Baumwurzeln abgeschnitten wurden, so blühte *Aegopodium podagraria* auch unter diesen Verhältnissen. Dieser Versuch ergab besonders auffällige Resultate in den trockenen Sommern von 1938 und 1939. In dem sehr feuchten Jahre 1940 blühte ein Teil der *Aegopodium podagraria* Exemplare auch unter dem Waldshirm. Folglich war es der Wettbewerb der Wurzeln um die Feuchtigkeit, welcher das Blühen verhinderte. Es ist deshalb höchstwarscheinlich, dass auch beim Versuch mit *Trinia Henningii* eben dieser Wettbewerb deren Entwicklung aufhält und sie nicht zur Blüte kommen lässt.

Auch bei einer Reihe anderer mehrjähriger Pflanzen wurde bei unseren Versuchen das Eintreten der Phänophasen im Falle intensiven Kampfes ums Dasein aufgehalten. So sind *Geum urbanum* L. und *Melandryum silvestre* (Schkur) Roehl., welche bei Aussaat im Frühjahr oft schon im ersten Jahr blühen, bei uns in dichten Ständen seit drei Jahren nicht zur Blüte gekommen, obgleich es sich vegetativ verhältnismässig gut entwickelt. Auch das Verhalten verschiedener Löwenzahn (*Taraxacum officinale* Wigg.) Biotypen hat gezeigt, dass dieselben bei dichtem Stand sämtlich mit Verspätung blühen (3).

Forstzüchtern war es schon längst bekannt, dass freistehende Bäume bedeutend früher, als solche in geschlossenen Beständen, zu fruchten beginnen (6). Ebenso ist festgestellt worden, dass viele unserer mehrjährigen Wiesenpflanzen, die in undichten Beständen im zweiten und zuweilen auch im ersten Jahr blühen, in dichten Beständen, wo der Kampf ums Dasein intensiv ist, jahrelang im vegetativen Stadium verbleiben können ohne zu blühen (7).

Unzweifelhaft ist dieser Unterschied im Verhalten einjähriger und mehrjähriger Pflanzen im Kampf ums Dasein, als eine historisch, durch natürliche Zuchtwahl zur Ausbildung gekommene Anpassungseigenschaft aufzufassen. Bei den einjährigen Pflanzen hat sich unter drohender herabgesetz-

ter Lebenstätigkeit, wenn nicht sogar des Untergangs, die Fähigkeit ausgebildet die Entwicklung zur Sicherstellung einer Nachkommenschaft zu beschleunigen. Für die mehrjährigen Pflanzen war es dagegen zweckmässiger die Fähigkeit auszuarbeiten ihre Entwicklung aufzuhalten, damit sie die ungünstigen Verhältnisse in wenig entwickeltem Zustand überleben könnten. Daher müssen wir die oben betrachtete bei scharfem Kampf ums Dasein stattfindende Umwandlung von *Trinia Henningii* aus einer zweijährigen in eine mehrjährige Pflanze, als die Äusserung einer adaptiven Modifikation ansehen, die sich unter den Verhältnissen des sehr dichten Bestandes, wie ihn die Streletzkaja Steppe in der Nähe von Kursk aufweist, ausgebildet hat. Sehr wahrscheinlich würde eine Untersuchung des Verhaltens von *Trinia Henningii* in der genannten Steppe zeigen, dass dieselbe an Stellen, wo die Pflanzen besonders dicht wachsen, jahrelang ohne zu blühen vegetiert.

Da das verschiedene Verhalten der ein- und mehrjährigen Pflanzen im Kampf ums Dasein das Resultat einer verschiedenen, durch natürliche Zuchtwahl erworbenen und erblich übertragenen Reaktionsnorm der Pflanze auf die Umweltverhältnisse bildet, so können in einzelnen Fällen solche Unterschiede zwischen ein- und mehrjährigen Pflanzen auch nicht vorhanden sein. Ein solcher Fall wird dann eintreten, wenn unter deren Lebensverhältnissen die erwähnte Zuchtwahl nicht stattgehabt hat und diese adaptiven Eigenschaften nicht zur Ausbildung gekommen sind. Von diesem Standpunkt aus wird das Fehlen einer beschleunigenden Wirkung auf die Entwicklung von Mais bei dessen dichter Anpflanzung verständlich. Mais ist eine eigentümliche durch Kultur enstandene Art, die nicht sehr dicht gepflanzt wird.

Bis jetzt wurde der Kampf ums Dasein zwischen den Pflanzen gewöhnlich nur von zwei Seiten einer Betrachtung unterzogen. Man studierte entweder die Gesetzmässigkeiten des Verlaufs des Wettbewerbsprozesses der Pflanzen um die Existenzmittel an sich, oder ihre Ausrüstung zum Kampf ums Dasein. Es fehlte eine klare Fragestellung nach dem, wie das beobachtete Verhalten einer gegebenen Pflanze im Kampf ums Dasein historisch zur Ausbildung gekommen ist.

Wie wichtig für das Verständnis des Verlaufs des Wettbewerbs die Lösung nicht nur der ersten beiden Fragen, sondern auch dieser letzteren ist, kann auch das nachstehende einen Begriff geben. Im allgemeinen reagieren die Pflanzen auf zunehmende Intensität des Wettbewerbs sehr verschieden. Während die einen ihre Ausmasse ausserordentlich herabsetzen ohne jedoch dabei die Fähigkeit zum Fruchttragen einzubüssen, fruchten andere selbst bei verhältnismässig geringer Abnahme an Grösse überhaupt nicht. Aus unseren Versuchen lassen sich beispielsweise zwei Fälle anführen. Bei *Chenopodium album* L., das in Leningrad auf ungedüngtem Boden bei einer Standdichte von 1250 Exemplaren pro 1 m^2 kultiviert wurde, variierte die Höhe der Pflanzen im Herbst zwischen 2 bis 30 cm, während die am Rande frei wachsenden Exemplare 205 cm erreichten. Trotzdem fruchteten sämtliche Exemplare, die kleinsten wie die grössten, und lieferten reife Samen, wenn auch natürlich in sehr verschiedenen Mengen. Bei ebendaselbst kultivierter *Datura stramonium* L. schwankte die Höhe der Pflanzen bei einer Standdichte von 818 Exemplaren pro 1 m^2 zwischen 4 und 105 cm, indessen setzten nur 96 (18%) Exemplare, deren Höhe zwischen 25 bis 105 cm lag, Frucht an. Nur in 4 Fällen betrug dieselbe 17 bis 25 cm. Von diesen 96 Exemplaren brachten blos 19, d. h. 3.6%, die Früchte zu normaler Entwicklung und Reife; dabei waren alle Exemplare nicht weniger, als 40 cm hoch.

Während also *Chenopodium album* gut dazu angepasst ist in einem harten Kampf ums Dasein zu bestehen, fehlt dem Stechapfel eine solche Anpassung gänzlich. Dieses verschiedene Verhalten im Kampf ums Dasein wird verständlich, wenn wir erwägen, dass *Chenopodium album* dichte Bestände bildet

und häufig unsere dichtstehenden Saaten verunreinigt, der Stechapfel dagegen vereinzelt oder in kleinen Gruppen vorkommt.

Das Studium des Kampfes ums Dasein bei einer ganzen Reihe von anderen Pflanzen hat das Vorhandensein eines ebensolchen Zusammenhanges zwischen der Ausdauer in diesem Kampf und den Wachsensbedingungen in der Natur aufgeklärt. In dieser Beziehung sind alle unsere Unkräuter der Saatfelder sehr bezeichnend. Von besonders hervorragender Ausdauer sind die typischen Unkräuter des Flachses, da sie dem gewöhnlich sehr dichten Stand desselben angepasst sind.

Von diesem Standpunkt betrachtet, werden die Angaben über die relative Fähigkeit der verschiedenen Geschlechter zweihäusiger Pflanzen den Kampf ums Dasein zu überstehen verständlich. Das von Correns([9]) unternommene Studium der relativen Ausdauer männlicher und weiblicher Exemplare von *Trinia glauca* im Kampf ums Dasein hat denselben zu keinen bestimmten Resultaten geführt. Bei unserem Versuch mit *Trinia Henningii* konnte eine etwas grössere Schwäche der männlichen Exemplare im Vergleich zu den weiblichen beobachtet werden. Bei *Salix viminalis* L. und *Melandryum silvestre* (Schkur) Roehl. zeigten gemäss unseren Versuchen beide Geschlechter dieselbe Standhaftigkeit im Kampf ums Dasein. Dagegen erwiesen sich bei Hanf die männlichen Exemplare schon von Anbeginn ihrer Entwicklung als offenbar schwächer (L. I. Uspenskaja, E. N. Kalnin, unveröffentlicht). Bei einem Versuche mit Hanf in sehr dichten Anpflanzungen auf ungedüngtem Boden gingen bereits zur Blütezeit 26% der männlichen Exemplare ein, während alle weiblichen am Leben blieben. Auf gedüngtem Boden kamen 44% der männlichen und 13% der weiblichen Pflanzen um. Bei undichtem Stand dagegen war kein Absterben der Pflanzen zu verzeichnen.

Ein so verschiedenes Verhalten, ein-, zwei- und mehrjähriger zweihäusiger Pflanzen im Kampf ums Dasein kann als nichts anderes, als die Folge davon angesehen werden, dass das frühere Absterben der männlichen Individuen, die ihre Bestimmung erfüllt haben, bei einjährigen Pflanzen den weiblichen Exemplaren zum Vorteil gereicht, indem dadurch der Wettbewerb um die Existenzmittel abgeschwächt wird. Bei zweijährigen Pflanzen ist dieses schon von geringerer Bedeutung. Mehrjährigen Pflanzen würde es direkt zum Schaden gereichen. Somit ist die den weiblichen Exemplaren gegenüber den männlichen eigene grössere Standhaftigkeit im Kampf ums Dasein eine ihnen zukommende, durch natürliche Zuchtwahl erworbene Anpassung.

Demgemäss wird das Verhalten der Pflanzen im Wettbewerb um die Existenzmittel mit anderen durch den Besitz im Laufe ihrer langen Geschichte durch natürliche Zuchtwahl ausgebildeter Fähigkeit zur bestimmten adaptiven Modifikationen bedingt. Die Rolle der Zuchtwahl in der Ausbildung dieser Fähigkeit wurde durch manche zoologische Untersuchungen gut erklärt ([10], [11]). Ein klares Verständnis davon ist notwendig für die zielbewusste Leitung des Konkurrenzkampfes zwischen den Pflanzen, denn von der Richtung die dieser einschlägt, hängen die Erfolge der mit der Mehrzahl unserer Kulturpflanzen zu erreichenden Erfolge ab.

Institut für Geobotanik.
Leningrad Universität.

Eingegangen
den 21. XII. 1940.

ZITIERTE LITERATUR

[1] В. Сочава, Зап. Ленингр. с.-х. ин-та, **3** (1926). [2] Л. Успенская, там же, **3** (1926). [3] Л. Успенская, там же, **5** (1929). [4] Е. Смирнова, Изв. Гл. бот. сада, 26, вып. 2 (1925). [5] А. Снигирева, Сов. бот., № 6 (1936). [6] М. Ткаченко, Общее лесоводство (1939). [7] И. Богдановская-Гиенеф, Зап. Ленингр. с.-х. ин-та, **3** (1926). [8] В. Сукачев, Юбил. сбор. И. П. Бородина (1927). [9] C. Correns, Die Absterbeordnung der beiden Geschlechter einer getrenntgeschlechtigen Doldenpflanze (*Trinia glauca*), Gesamm. Abhandl. (1924). [10] И. И. Шмальгаузен, Пути и закономерности эволюцион. процесса (1939). [11] M. Kamshilov, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIII, No. 4 (1939).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

PLANT BIOLOGY

NEW METHOD FOR COMPARATIVE CYTOLOGICAL STUDY OF SPECIES

By I. N. SVESHNIKOVA

(Communicated by I. I. Schmalhausen, Member of the Academy, 30.XII.1940)

In order to reveal chromomeres, fluids containing no, or but very little acetic acid have lately been used; root tips are often treated with cold before fixation. The chromomeres are formed owing to different condensation of chromatin at different loci of the chromosome, depending on the genetically significant framework which becomes covered with chromatin. It is thus evident that chromosome morphology is built entirely on a genetic basis, in the direct meaning of the word. This is why all the details of the chromosome morphology are of particular importance when taxonomy is considered from an evolutionary point of view.

The chromomeres which had been first discovered in grasshoppers at meiosis (Wenrich, 1916) were later found in the somatic metaphases in *Crepis*[2]. However, a more precise analysis of the somatic chromomeres was made using root tips of *Allium* by growing the roots in a highly aerated medium, e. g. in saw-dust[10]. These results have been confirmed on *Crepis* and *Secale*[5,9]. The best results have been obtained with platinum-formalin[6] (platinum chloride, 1 part; formalin, 50% of the commercial product, 1 part; fixation during 24 hours; washing 4 hours).

The chromomeres of *Vicia* which have been only counted, but not yet studied as to their size, are compound structures which may be further resolved into ultimate chromomeres under the application of an improved technique. In *Drosophila* 17 chromomeres of the third chromosome in the somatic prophase correspond to 1450 bands of the same chromosome in the salivary gland cells.

In our experiment three containers were filled with saw-dust moistened with weighed amounts of water. One of them was supplied with a minimum amount of water just necessary to keep the plant alive. It appeared that minimum moisture leads to the best differentiation of the chromomeres owing to maximum aeration. When distaining is being brought almost to the limit of visibility, differential staining of the chromomeres within a chromosome may be attained (Fig. 1). This phenomenon is analogous to that observed in aceto-carmine preparations made of salivary chromosomes of *Drosophila*; since the bands of the salivary chromosomes stain differentially, the chromomeres, which are but groups of bands, should stain differentially, too. Using strong distaining in studying meiosis in hybrids it proved possi-

ble to obtain differential staining of the partners of a bivalent([7],[8]); this result was confirmed on other material (Aase and Ellenhorn). Further cytogenetic study of the species of *Vicia* will show whether the chromomeres which take deeper stain are associated with inert regions, as demonstrated by Heitz for somatic chromosomes in *Drosophila*. *V. sativa* and its wild relatives were compared with one another with regard to the number of chromomeres; there was found a correlation between the increase in number of chromomeres and in certain quantitative characters. Thus, *V. amphicarpa* ($2n = 10$), a wild species developing a few branches and always possessing only a single flower per inflorescence, has only 33 chromomeres. *V. sativa* and *V. angustifolia brachisomica* show strong branching and often possess two flowers per inflorescence; the chromomere number in either of them is 37. Finally, *V. angustifolia dolichosomica* has a maximum number of chromomeres (39) and, correspondingly, shows the strongest branching and has up to three flowers per inflorescence (Fig. 2). It seems possible that duplication of the chromomeres is one of the ways of evolution ([8]).

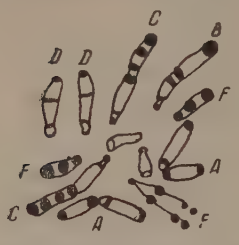


Fig. 1.

It had been shown as early as in 1935 that stable chromosomes should be distinguished from the labile ones ([7]). This hypothesis has found its support in comparative studies of the chromomere structure. Chromosomes *B* and *D* which had been found to be stable with respect to length show in all the four species the same number of chromomeres; in the *B*-chromosome the number is 6, in the *D*-chromosome it is 5 (Fig. 2, *1—4*). Chromosomes *A* and *E* proved to be labile as to the number of chromomeres. The number of chromomeres increases: in *V. amphicarpa*, a wild form with 5 pairs of chromosomes possessing one flower per inflorescence and showing slight branching, there are 8 chromomeres in the *A*-chromosome; in *V. angustifolia brachisomica* there are 9 chromomeres and, finally, the *A*-chromosome of *V. angustifolia dolichosomica* has 12 chromomeres; the last named form shows the strongest branching and has the highest number of flowers per inflorescence (Fig. 2, *1—4*). The last named species has in all 39 chromomeres, i. e. by 6 chromomeres more than *V. amphicarpa*; *V. sativa* and *V. angustifolia brachisomica* have 37 chromomeres each; these species are characterized by an intermediate number of chromomeres, by an intermediate number of flowers (1—2) and by intermediate branching. It is possible that a duplication of chromomeres bearing upon these characters took place here; this has been referred to above. The process of shortening of the *E*-chromosome described earlier([7]) consists in the reduction of two chromomeres. This chromosome great-

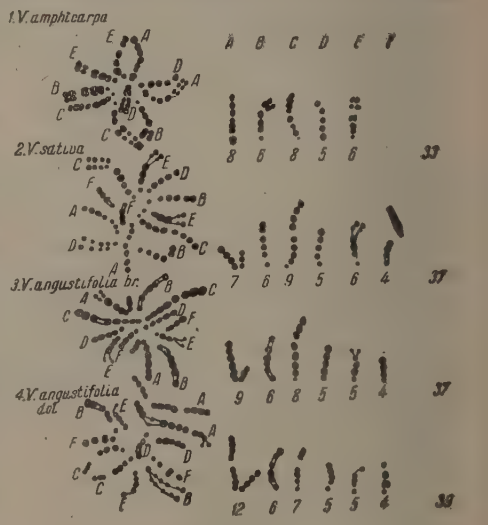


Fig. 2.

ly differs from the rest by the presence of a large achromatic constriction which is revealed, similarly to the primary constrictions, after Navashin's fixing fluid, whereas no secondary constrictions can be seen after this fixation. It is quite evident that this great achromatic constriction is in some way connected with the gradual disappearance of the chromomeres which lie beyond the constriction: in *V. amphicarpa* one can see a small arm consisting of two large chromomeres (Fig. 2,*1*); in *V. sativa* one of the two chromomeres is greatly diminished; finally, in the two forms of *V. angustifolia* the portion in question consists only of one chromomere (Fig. 2, *3—4*); however, the constriction persists. This is why Heitz assumed this hanging chromomere to be a satellite ([3]). In all the 4 species the *E*-chromosome contains 4 chromomeres between the end and the achromatic constriction. The third chromosome, which is assumed by us to be labile, is the *F*-chromosome; however, in all the 3 species studied it proved to contain 4 chromomeres. The great length of the *F*-chromosome in *V. angustifolia brachisomica* depends upon a larger size of the nucleus in this species; in *V. angustifolia dolichosomica* it owes its great length to greater distances between chromomeres. The distance between the chromomeres may vary greatly, and the cause accounting for this phenomenon will constitute the subject of a special study.

Our interpretation of the alterations in the *F*-chromosome as a newly formed chromosome inducing further chromosomal changes([6]) finds support in the studies on *V. macrocarpa*, a species closely related to *V. sativa* and readily crossable; the results of these studies will be published elsewhere.

The *C*-chromosome was considered by us stable with regard to length; however, like the *B*- and *D*-chromosomes, it proved to have suffered some kind of change: the initial form *V. amphicarpa*, like *V. angustifolia brachisomica*, had 8 chromomeres (Fig. 2), whereas *V. angustifolia dolichosomica* had one chromomere less and the cultivated *V. sativa* has two chromomeres more.

A comparative study of the bands in salivary chromosomes of different species of *Drosophila* has shown that pairs of closely related species, like *D. melanogaster* and *D. simulans* (Pätau, 1935) or *D. pseudoobscura* and *D. miranda* (Dobrhansky, 1936), have nearly the same number of bands differing mainly in inversions and translocations. It is possible that polyploidy as well as «polychromomery» occur mainly in plants.

Institute of Cytology.
Academy of Sciences of the USSR.

Received
30. XII. 1940.

REFERENCES

[1] C. B. Bridges, Jrnl. of Heredity, **26**, No. 2 (1935). [2] Geitler, ZS. f. Zellf. u. mikr. Anat., **10**, No. 1 (1931). [3] E. Heitz, Planta, **15** (1931). [4] P. Kaufmann, Jrnl. of morphology, **56**, No. 1 (1934). [5] N. Kakhidze, C. R. Acad. Sci. URSS, XXII, No. 7 (1939). [6] G. A. Lewitsky, ibid., (1934). [7] И. Н. Свешникова, Биол. журн., V, № 2. [8] И. Н. Свешникова, там же, IV, № 5. [9] S. N. Shmargon, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIII, No. 3 (1939). [10] Я. Элленгорн, Биол. журн., VI (1937).

Translated by M. Navashin.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

HISTOLOGIE

DIE BESONDERHEITEN DES WACHSTUMS AUSSERHALB DES ORGANISMUS DER FORTSÄTZE SENSORISCHER NEURONEN

Von L. S. SUTULOV

(Vorgelegt von I. I. Schmalhausen, Mitglied der Akademie, den 28.XI. 1940)

Die Elemente des Nervensystems sind mit der Gewebezüchtungsmethode noch verhältnissmässig wenig studiert, obzwar es eben die Gewebe des Nervensystems waren, die Harrison als erstes Objekt für seine Beobachtungen des in vitro Wachstums gedient haben. Das Wachstum in Explantaten der Neuroblastenfortsätze und der Nervenzellen wurden von Harrison (1), Levi (2), Olivo (3), Esaki (4), Grigorieff (5), Lazarenko (6), Levi und Delorenzi (7) u. a. beobachtet. Die Untersuchungen wurden grösstenteils an Hühnerembryo-Material ausgeführt. Über das Wachstum ausserhalb des Organismus der Fortzätze der Säugernervenzellen wird in wenigen Arbeiten berichtet (8, 9 u. a.).

In vorliegender Mitteilung wird der allgemeine Charakter des Wachstums und der Verwandlungen der Fortsätze sensorischer Neurone der Spinalganglien der Säugetiere geschildert. Als Untersuchungsobjekt dienten die Spinalganglien von Kaninchenembryonen und jungen, 1 bis 5 Tage alten, Kaninchen. Die Auspflanzung geschah nach der Methode des hängenden Tropfens. Als Nährmedium wurden Heparinplasma und Hühnerembryonalextrakt gebraucht. Die Passage der Kulturen auf runden Glimmerplatten geschah jeden vierten Tag, unter Zugabe von Extrakt+Plasma. Die Explantate wurden sowohl im lebenden, wie auch im fixierten Zustande untersucht. Für Totalpräparate wurde Fixierung der Kulturen mit 10% Formalinlösung und Färbung mit Hämatoxylin nach Carazzi gebraucht. Für Zelloidinserien—Fixierung mit Zenker-Formol oder nach Champy und Färbung mit Heidenhain's Eisenhämatoxylin oder Eosin-Azur. Lagen spezielle Ziele vor, so wurden die Kulturen nach Kull bzw. nach Ramon y Cajal und nach der neuen Golgi Methode behandelt. Im ganzen sind ca 20 Versuchsserien ausgeführt worden. Die Beobachtungsfrist der Explantate (in bezug auf ihr Existieren ausserhalb des Organismus) betrug 1.5 Monate.

In der Wachstumszone der Kulturen treten die Nervenfortsätze als Folge der Regeneration der durch Explantierung geschädigter Achsenzylinder auf. Bei längerer Züchtungsdauer der Stückchen bekommt man zu sehen, wie sich die Nervenfasern verlängern und zahlreicher werden. Die Fasern wachsen entweder in radialer Richtung aus dem Stückchen heraus, oder sie durchkreuzen einander in verschiedenen Richtungen. Meistens sind es Fäden von höchst verschiedener Dicke aber ohne Anschwellungen. Varikositäten kommen in geringer Zahl vor; sie werden durch äussere Einflüsse, als wie bei supravitaler Methylenblaufärbung oder durch Irradiieren mit ultravioletten Strahlen (10) bewirkt. Meistens führen die regenerierenden Fasern kleine Anschwellungen an ihrem freien Ende. Es kommt vor, dass das freie Ende der Faser

sich pinselartig in kleine Filamente zerfasert, wobei letztere miteinander in Verbindung treten können, eine netzartige einer einzigen Faser angehörende Struktur ergebend.

Nach Levi geht das Wachstum der Nervenfasern nach 48-stündiger Züchtung langsamer vor sich hin und am 4. Tag hört es völlig auf. Esaki sah Fasern auch in älteren Kulturen auftreten. Meine Erfahrung ist, dass das Wachstum der Fortsätze sensorischer Neuronen nicht allein in den ersten Tagen der Züchtung, sondern auch nach wiederholten Passagen geschieht.

Die Spinalganglienexplantate besitzen ein scharf ausgeprägtes fibrinolytisches Vermögen. In den Kulturen treten häufig, bereits in den ersten Tagen der Explantierung, grössere Verflüssigungs-Hohlräume auf. Dann werden solche Flüssigkeit führende Hohlräume durch die saitenartig gespannten Nervenfortsätze durchquert, oder die Nervenfasern schwimmen in der Flüssigkeit als abgerissene Filamente, oder sie schlagen einen Umweg ein.

Die Fortsätze der sensorischen Neurone verzweigen sich stark in der Wachstumszone. Man sieht manchmal vereinzelte Abzweigungen, die unter einem gewissen Winkel abgehen; des öfteren teilt sich aufeinmal eine dicke Nervenfaser baumartig in feinere Abzweigungen, oder es kommt auch nicht selten vor, dass eine dickere Faser in ihrem Verlauf zahlreiche feine Kollaterale abgibt. Die in das Plasma hineingewachsenen Fasern vermögen sich miteinander zu vereinigen und ergeben also mehr oder minder komplizierte Netze und Verflechtungen. Dies sind keine beständigen Strukturen. Die einen können verschwinden, andere neu auftreten. In der Regel sind bei den Embryonen die Fasern dicker und netzartige Strukturen treten häufiger auf. In mehreren Fällen ergeben die Fortsätze, indem sie gleichfalls miteinander verschmelzen, einen einheitlichen breiten Strang. An der Netzbildung können nicht allein Nervenfortsätze beteiligt sein; ausgestreckte Fortsätze der Neurogliazellen können sich ihnen anlegen und sich ihnen gleichsam hinzugesellen. Die komplizierter gebauten Netze kommen in der Nähe des Gewebsstückchens vor. Die in die Wachstumszone hineingewachsenen Schwannschen Zellen können sich den Nervenfortzätzen anlegen und deren Wachstum begleiten. Wenn Ganglienstückchen samt den Wurzeln explantiert waren, so wuchsen Fortsätze nicht allein aus den blosgelegten Bezirken der Ganglien, sondern auch aus den durchtrennten Enden der Wurzeln heraus.

In den ausgewachsenen, insbesondere in den dickeren Nervenfasern lässt sich bei in vivo (visuell oder an Mikrophotogrammen) eine durch den Verlauf von Fibrillen erzeugte Längsstreifung erkennen; diese ist aber von höchst labiler und wechselnder Natur. Unter Einwirkung von schwacher mechanischer, resp. termischer Reize tritt diese fibrilläre Struktur deutlicher hervor. An Hand der beobachteten Bilder dürfte man, meines Erachtens, von der bei Leben bestehenden Existenz von Neurofibrillen auch bei Säugetieren sprechen, was mit den, an anderen Objekten neuerdings ermittelten, Angaben ([11]) im Einklang steht.

Institut für Histologie und Embryologie.
Leningrad. Kriegsärztliche Akademie.

Eingegangen
den 28. XI. 1940.

ZITIERTE LITERATUR

[1] R. Harrison, Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med., 4 (1907). [2] G. Levi, Erg. d. Anat. u. Entwicklungsgesch., 31 (1934). [3] O. Olivo, Arch. exper. Zellforsch., 5 (1927). [4] Sh. Esaki, C. R. Ass. Anat., 24 réunion, Bordeaux (1929). [5] L. M. Grigorieff, Arch. exp. Zellforsch., 11 (1931). [6] Th. Lazarenko, ibid., 11 (1931). [7] G. Levi e E. Delorenzi, Arch. Ital. di Anatom. e di Embriol., XXXIII (1934). [8] K. Ingebrigtsen, J. exp. Med., 17, 18 (1913). [9] G. Martinovič, Arch. exp. Zellforsch., 12 (1932). [10] Th. Lazarenko und M. Benenson, ibid., 13 (1932). [11] G. Levi und H. Meyer, Anat. Anz., 83 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

EVOLUTIONSMORPHOLOGIE

HETEROCHRONIE IN DER ANLAGE DER SEGMENTALORGANE, IHRE URSACHEN UND FOLGEN

Von S. W. EMELIANOV

(Vorgelegt von I. I. Schmalhausen, Mitglied der Akademie, den 30.XII.1940)

In der individuellen Entwicklung unterliegt das Auftreten der Organe der Zeit nach grossen Schwankungen: ein und dasselbe Organ wird bei einer Art auf einem früheren Entwicklungsstadium des Tieres, bei einer anderen aber auf einem späteren angelegt. Die Verschiebung der Zeit der Anlage des Organs auf ein, im Vergleich zum ursprünglichen anderes Entwicklungsstadium des Tieres bezeichnet man gewöhnlich durch den Terminus Heterochronie. Zu den Grundfragen der Heterochronie gehört die Frage von den Ursachen der Anlage ein und desselben Organs bei den verschiedenen Tieren zu verschiedener Zeit und die Frage, wie sich die Anlage des Organs in verschiedener Zeit in der weiteren Entwicklung äussert.

Die Zeit der Anlage des Organs wird in der Ontogenese in erster Linie durch sein phylogenetisches Alter bestimmt. Von zwei Organen mit ähnlichem Bau und Funktion, die zur gleichen Lebensperiode des Tieres funktionieren, wird das ältere früher und das jüngere später angelegt. So ist die hintere Rückenflosse der Knochenfische eine ganz alte Bildung, die schon bei den gemeinsamen Stammeltern aller rezenten Fische entstand, die vordere Rückenflosse aber eine neue Bildung, die erst bei den Knochenfischen erschien (1). In der Regel wird die vordere Rückenflosse bei den Knochenfischen bedeutend später als die hintere angelegt. Von den Elementen des Wirbels treten in der Phylogenese zuerst die oberen Bögen auf (sie finden sich schon bei den *Cyclostomata*), dann erscheinen die unteren Bögen (bei den gemeinsamen Vorfahren der rezenten Fische). In der Ontogenese bewahrt das Rumpfgebiet der Knochenfische diese Reihenfolge: zuerst werden die oberen, dann die unteren Bögen angelegt. Die unteren Rippen sind bedeutend älter als die oberen, sie erschienen bei den gemeinsamen Ahnen der rezenten Fische, während die oberen sich erst bei *Holosteoidei primitivi* finden (2). In der Ontogenese der Knochenfische werden ebenfalls die unteren Rippen merklich früher als die oberen angelegt.

Die Zeit der Anlage des Organs kann in der Ontogenese lange unverändert bleiben. Dies geschieht wahrscheinlich in den Fällen, wo sich die Funktions- und Entwicklungsbedingungen des Organs bei den Nachkommen ohne wesentlichen Veränderungen erhalten. Allerdings kann das Organ bei den Nachkommen nicht zu der gleichen Zeit wie bei den Ahnen, sondern früher oder später zu funktionieren beginnen. So beginnen die vorderen Rücken- und die Bauch-

flossen bei den pelagischen Planktonlarven einiger Knochenfische (z. B. *Lophius*) auf sehr frühen Stadien zu funktionieren. Diese Flossen werden zu Larvenorganen, während diese Flossen bei den Fischen mit nektomischen Larven Organe des entwickelten Jungfisches sind. Im Zusammenhang mit dem frühzeitigen Funktionsbeginn werden die vorderen Rücken- und Bauchflossen bei *Lophius* bedeutend früher als gewöhnlich angelegt. Die vordere Rückenflosse, die gewöhnlich als letzte auftritt, wird bei *Lophius* früher als alle anderen unpaarigen Flossen angelegt; die Bauchflossen der Fische mit nektonischen Larven werden bedeutend später als die Brustflossen angelegt, bei *Lophius* aber gleichzeitig mit den Brustflossen.

Bei den *Amniota*, die sich auf dem Lande fortbewegen, z. B. *Lacerta*, beginnen die vorderen und hinteren Gliedmassen gleichzeitig zu funktionieren. Bei den Brutvögeln, z. B. den Hühnern, beginnen die Flügel bedeutend später als die Beine zu funktionieren. Trotzdem lässt sich im Zusammenhang damit keine verspätete Anlage der Flügel beobachten. Die Flügel des Huhnes werden zur selben Zeit angelegt, wie die Vordergliedmassen der Eidechse. Dies zeigt, dass eine Verschiebung des Funktionsbeginns eines Organs auf ein späteres Stadium zum Unterschied einer Verschiebung auf ein früheres die Zeit der Anlage des Organs nicht verändert.

Die morphogenetischen Korrelationen [nach der Klassifikation I. I. Schmalhausens ([3])] rufen häufig Veränderungen der Zeit der Anlage hervor. Diese Veränderungen können die Anlage des Organs auf eine frühere oder spätere Zeit verschieben. Bei einer Lageänderung des Organs im Organismus kann sich auch die Zeit seiner Anlage ändern. So wird die hintere Rückenflosse der *Teleostomi*, die über der Analflosse liegt, gleichzeitig mit letzterer angelegt (*Percesoces*, *Acanthopterygii*, *Esox*). Die vor der Analflosse gelegene Rückenflosse wird früher als die Analflosse angelegt (*Acipenser*, *Callichthys*), die hinter der Analflosse gelegene (*Lepidosteus*, *Osphromenus*) wird später als diese angelegt. Diese Unterschiede stehen damit in Zusammenhang, dass die Segmente des Wirbeltierkörpers nicht gleichzeitig, sondern eins nach dem anderen, von den Occipitalsegmenten beginnend und am Schwanz endigend, angelegt werden. Diese Reihenfolge wirkt sich auf den Entwicklungsverlauf einer Reihe von Organen aus und verändert im besonderen die Zeit der Anlage der Rückenflosse im Falle seiner Lageänderung.

Einzelne homodynamische Bildungen stehen in ihrer Entwicklung fest miteinander in Zusammenhang. Gewöhnlich wird anfangs eines (oder eine geringe Anzahl) der Glieder der homodynamischen Reihe angelegt. Die weitere Anlage geht allmählich vor sich und beginnt bei dem Element, das dem zuerst angelegten Element am nächsten liegt. Diese Reihenfolge lässt sich bei der Entwicklung der Wirbelbögen, der Rippen, der Flossenstrahlen, der Finger usw. beobachten. Im Falle einer Änderung der Zeit der Anlage des ersten Gliedes der homodynamischen Reihe verändert sich korrelativ auch die Zeit der Anlage der anderen Glieder. Die ungewöhnlich frühe Anlage der unteren Bögen des vorderen Rumpfabschnittes der *Cyprinidae*, die nach den Angaben Matveiev's ([4]) mit dem Weber'schen Apparat im Zusammenhang steht, veranlasst auch die frühere Anlage aller übrigen unteren Bögen des Rumpfes. Wenn aus diesem oder jenem Grunde zuerst das Glied der homodynamischen Reihe angelegt wird, das gewöhnlich als letztes angelegt wird, so ist die ganze Reihenfolge verändert, sie verläuft in umgekehrter Richtung. In der Regel verläuft die Entwicklung der Rücken- und Analflossen von vorn nach hinten, kann aber auch als Ausnahme von hinten nach vorn verlaufen. Die ergontischen Korrelationen können ebenfalls die Zeit der Anlage des Organs verändern, aber sie können zum Unterschied von den morphogenetischen Korrelationen nur zu einer früheren Anlage des Organs führen. So führt die Entwicklung des Beckengürtels des Axolotls zu

einer, im Vergleich mit den weiter vorn liegenden Rippen, frühzeitigeren Anlage der oberen Rippen der Kreuzwirbel, was bei den Fischen, bei denen der Beckengürtel nicht zum Achsenskelett befestigt ist, nicht vorkommt.

Das Tempo der Anlage der einzelnen Segmente der metameren Organe ist bei den verschiedenen Tieren ganz verschieden, dies führt zu grossen Verschiebungen der Zeit der Anlage dieser Organe. Bei einer Art von Tieren folgen die Segmente des metameren Organs so schnell in ihrer Anlage einander, dass es schwer sein kann, die Reihenfolge ihres Auftretens festzustellen. Bei einer anderen Tierart jedoch vollzieht sich das Aufeinanderfolgen ganz langsam und führt zu einer bedeutenden Verspätung in der Anlage der letzten Glieder. So werden zum Unterschied von der Mehrheit der Tetrapoden beim Axolotl die Rippen der vorderen Segmente bei den Larven von ungefähr 20 mm Länge angelegt, in den zwei letzten Rumpfsegmenten aber sind ihre Anlagen noch nicht bei den Larven von ungefähr 50 mm Länge vorhanden. Ebenso stark verspätet beim Axolotl die Anlage der hinteren Extremitäten im Vergleich mit den vorderen. Die Verspätung dieser Anlagen beim Axolotl wird wahrscheinlich zum Unterschied oben beschriebener Fälle duch einige allgemeine Ursache (bis jetzt nicht geklärt) hervorgerufen, die nicht nur die Verspätung eines Organs, sondern das langsame Auftreten einer ganzen Reihe Segmentalorgane hervorruft.

Weit verbreitet ist die von Mehnert ([5],[6]) ausgehende Meinung, dass die progressive Entwicklung des Organs eines erwachsenen Tieres seine frühzeitige, die regressive aber seine spätere Anlage veranlasst. Die Kritik der Arbeiten Mehnert's führte mich zur Schlussfolgerung, dass die Voraussetzungen, von denen er ausging, falsch sind, die Prüfung seiner Schlüsse an faktischem Material bestätigte sie nicht. Progress und Regress der Organe sind keine Faktoren, die auf die Zeit der Anlage der Organe einen Einfluss haben. In dieser Beziehung stimmen meine Schlüsse mit denen A. N. Sewertzoffs ([7]) und S. G. Kryzhanovskys ([8]) überein.

So führen mich meine Beobachtungen zu der Schlussfolgerung, dass die Zeit der Anlage des Organs in der Ontogenese durch vier Faktoren bestimmt wird: 1) durch den historischen, 2) funktionalen, 3) korrelativen und 4) durch den Faktor des allgemeinen Tempos der Differenzierung.

Änderungen der Zeit der Anlage morphologischer Bildungen können den Charakter ihrer Entwicklung verändern. Die Veränderung der Zeit der Anlage jedoch verändert nicht immer, ja sogar selten die Morphogenese. Bei der Betrachtung der Wirkung der Heterochronie auf die Morphogenese muss man die Änderungen der Zeit der Anlage des ganzen Organs (z. B. die Gliedmassen, die Wirbelsäule) und die Änderungen der Zeit der Anlage der einzelnen Teile des Organs (z. B. die Flossenstrahlen, die Bögen der Wirbel) eines im Verhältnis zum anderen unterscheiden.

Die Veränderung der Zeit der Anlage einzelner Teile des Organs kann den Charakter der Entwicklung dieser Teile verändern. In dem Fall, wenn sich die Entwicklung verändert (was bei weitem nicht immer vorkommt), kann man volgende Gesetzmässigkeiten bemerken: die Teile des Organs, die früher angelegt werden, durchlaufen eine vollständigere und primitivere Art der Entwicklung, die Teile aber, die später angelegt werden, können eine im Vergleich zur primitiven, beschleunigte und veränderte Entwicklung durchlaufen. Die spätere Anlage der oberen Rippen der hinteren Rumpfsegmente des Axolotls führt zur abgeänderten Entwicklung: zum Unterschied von der typischen distoproximalen Entwicklung werden diese Rippen neben den oberen Bögen angelegt und wachsen in proximodistaler Richtung ([9]). In den Fällen, bei denen in der Entwicklung der Skelettelemente des betreffenden Organs ein Ausfall der Knorpelstadien statt hat ([10]), gehören sie in erster Linie zu später angelegten Elementen. In den Fällen, wo im Organ eine Reduktion

seiner einzelnen Elemente erfolgt, werden in erster Linie diejenigen reduziert, die später angelegt werden. Diese Gesetzmässigkeit, festgestellt von A. N. Sewertzoff ([7]) auf Grund der Untersuchung der Extremitäten der Reptilien, bestätigt sich durch meine Beobachtungen an den unpaaren Flossen (Reduktion der später angelegten distalen Glieder der Pterygiophoren).

Die Zeit der Anlage des ganzen Organs in bezug auf den ganzen Organismus hat keine wesentliche Bedeutung für die weitere Entwicklung dieses Organs. So wird nach Sewertzoff ([7]) die sich reduzierende Extremität (*Ophisaurus*) zur selben Zeit wie normale (*Ascalabotes*) angelegt. Andererseits kann die sich normal entwickelnde und sich nicht reduzierende Extremität (Axolotl, Triton) sehr spät angelegt werden. Der Charakter der histologischen Entwicklung eines Skelettelementes kann sich in Abhängigkeit von der Zeit seiner Anlage, im Vergleich zu anderen Skelettelementen des betreffenden Organs, verändern und braucht sich nicht zu verändern in Abhängigkeit von der Zeit der Anlage des ganzen Organs ([11]).

Die Tatsache, dass die Zeit der Anlage des Organs nicht auf den weiteren Gang seiner Entwicklung wirkt, die Zeit der Anlage einzelner Teile des Organs aber wirkt, erklärt sich meiner Meinung nach durch den hohen Grad der korrelativen Abhängigkeit (hauptsächlich ergontischen) zwischen den einzelnen Teilen ein und desselben Organs im Vergleich zum geringeren Zusammenhang des ganzen Organs mit dem ganzen Organismus.

A. N. Sewertzoff Institut für Evolutionsmorphologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

Eingegangen
den 30. XII. 1940.

ZITIERTE LITERATUR

[1] С. В. Емельянов, Сб. пам. акад. А. Н. Северцова, I (1939). [2] S. W. Emelianov, Zool. Jahrb., **60** (1935). [3] И. И. Шмальгаузен, Сб. пам. акад. А. Н. Северцова, I (1939). [4] B. S. Matveiev, Zool. Jahrb., **51** (1929). [5] E. Mehnert, Kainogenesis, Jena (1897). [6] E. Mehnert, Biomechanik, Jena (1898). [7] А. Н. Северцов, Морфологические закономерности эволюции (1939). [8] С. Г. Крыжановский, Сб. пам. акад. А. Н. Северцова, I (1939). [9] S. W. Emelianov, Zool. Jahrb., **62** (1936). [10] S. W. Emelianov, C. R. Acad. Sci. URSS, XXIII, No. 9 (1939). [11] S. W. Emelianov, ibid., XXVI, No. 5 (1940).

Übersetzt von G. Streich.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1941. Volume XXX, № 8

EXPERIMENTELLE MORPHOLOGIE

FORMBILDUNGSFELDER DES MESODERMS BEI AMPHIBIENKEIMEN

Von G. V. LOPASHOV

(Vorgelegt von I. I. Schmalhausen, Mitglied der Akademie, den 14.XII.1940)

Die Arbeiten Spemanns sowie seiner Mitarbeiter ([13]) haben festgestellt, dass die sekundären Anlagen, welche im Bauch des Keimes bei der Verpflanzung verschiedener Induktoren entstehen, in diesem oder jenem Grade dem Einfluss des Wirtsgebiets, in dem sie liegen, unterworfen sind. Dabei geht die Induktion des primären Nervensystems und die es umgebenden Organe nur im Dorsalgebiet des Keimes vor sich; je weiter von der primären Anlage, desto geringer ist die Wirkung auf die sekundäre Anlage; in dem isolierten Gastrulaektoderm bestimmt der Induktor gänzlich die Regionalbesonderheiten der entstehenden Anlage ([7],[8]). Diese Tatsachen erklären sich wohl hauptsächlich dadurch, dass das ganze Mesoderm entlang der Körperachse in eine Reihe von Niveaus gegliedert ist, ihre Induktionswirkung aber ist genügend stark nur im dorsalen Teil. Wenn diese Auffassung richtig wäre, so könnte man erwarten, dass die Teile des Mesoderms, welche gewönhlich das Gehirn induzieren, auch fähig sind andere Organe, welche ihm zur Seite liegen (Neuralwülste oder ihre Derivate, Nasenplakode, Hörblasen), zu induzieren. Das Ektoderm verliert bei dem Übergang in das Neurulastadium autonom die Fähigkeit sich in Gehirnzellen zu entwickeln ([9]). Indem wir das Material der Neuralplatte (Stadium der späten Gastrula—frühe Neurula) durch das Bauchektoderm bei den Stadien der vollendeten Gastrula—mittlere Neurula ersetzen, könnte man erwarten, dass die Induktion von Nervenzellen in einem engeren Gebiet (median) vor sich gehen wird, dann aber gänzlich verschwindet. Ob dabei auch andere Organe entstehen und wie die Entwicklung der Keime vor sich geht, den von allem Anfang das Nervensystem fehlte, war das Problem der vorliegenden Arbeit. Hier wird nur über die Hauptergebnisse berichtet. Als Wirte dienten nur *Triton taeniatus*; als Spender, zwar selten, auch Axolotlkeime. Das Transplantat wurde in vielen Fällen vitalgefärbt. Die Versuche wurden in den Jahren 1937/38 ausgeführt. Von den 170 gelungenen Operationen wurde ungefähr die Hälfte fixiert und bearbeitet. Die Keime wurden nach Möglichkeit bis zu dem dreizehigen Vorderextremitätenstadium aufgezogen.

Obgleich fast bei allen Operationen (ausser denen, wo sich der Wirt im Stadium der späten Gastrula befand) ganz bestimmt das ganze Material der präsumptiven Nervenplatte entfernt wurde, so entstanden an den Rändern der Transplantate doch nicht selten Neuralwülste, welche am häufigsten dem kaudalen Ende des Keimes näher entstanden, wo sie gut, bald von einer, bald von beiden Seiten zu sehen waren. Dies waren wirkliche Neuralwülste. Wenn

ich sie nicht entfernte, so entwickelten sich aus ihnen alle normalen Derivate, besonders die Pigmentzellen. In den vorderen Teilen des Keimes entstanden sie nur in den Gebieten, wo, wie die Protokolle zeigten, sich das Wirtsektoderm ersichtlich nach oben verschoben hatte. Wenn aber das Wirtsektoderm nur als eine Art von Streif an dem Bauchgebiet des Wirtes blieb, so entstand das Material der Neuralwülste nicht. In den hinteren Teilen des Körpers, dank der starken Verschiebung des Materials dorsalwärts, wurde das Transplantat gewöhnlich stark eingeengt, zum Unterschied vom Kopfgebiet. Da die wiederholte Entstehung der Neuralwülste noch während des Stadiums der frühen Neurula beobachtet wurde, so folgt daraus der Schluss, dass das Material des Ektoderms, welches etwas niedriger als die Neuralwülste liegt, noch fähig sein muss auch während dieses Stadiums durch Wirkung der obersten Mesodermteile, sich in Zellen der Neuralwülste zu entwickeln.

Die Nervenzellen und die Derivate der Neuralwülste entstehen in einer Reihe von Fällen auch aus den Transplantatgeweben. Aus den Transplantaten des mittleren und späten Neurulastadiums entstanden sie nicht; aus dem Material der vollendeten Gastrula—früher Neurula entstanden sie in bedeutender Zahl von Fällen. Einen Zusammenhang mit dem Alter innerhalb der Grenzen dieser Stadien festzustellen ist nicht möglich, obgleich in den späteren Transplantaten augenscheinlich die Induktion etwas seltener vor sich geht. Eine Reihe von Tatsachen zeigt, dass hier eine wesentliche Rolle die Dichte des Kontakts zwischen dem Transplantat und dem Wirtsgewebe, sowie ihre Verwachsungsgeschwindigkeit spielen, was auch den Bau der entstehenden Gebilde beeinflusst. Als Regel, entstehen die Induktionen vor allem über dem mittleren Teil des Mesoderms, über der Chorda und nur wenn sich Gebilde von bedeutender Grösse induzieren, so dehnen sich diese Gebilde auch weiter nach den Seiten aus. In dem kaudalen Teil des Körpers finden die Induktionen bedeutend häufiger statt. Es entwickelten sich: 1) Teile des Nervensystems, zwar von verkleinertem Ausmass, aber von mehr oder weniger normalem Bau+Derivate der Neuralwülste (Knorpel, Melanophoren und Ganglien); 2) Nervenzellen und Ganglien, die locker der Chorda anliegen+Derivate der Neuralwülste+verdicktes Palisadenepithel mit klar abgegrenzten Zellen; 3) Derivate der Neuralwülste+Palisadenepithel+ +vereinzelte Nervenzellen, welche in dem Bindegewebe unter der Epidermis liegen oder in den Bestand des letzteren eingehen (von einigen ziehen längsgestreifte Nervenfasern ab); 4) Palisadenepithel+Melanophoren; 5) das Transplantat bleibt unverändert oder wird nur mehrschichtig, ohne den Bau der Zellen zu verändern. Ausserdem entwickelten sich Flossensäume (öfter an den hinteren Körperteilen); in manchen Fällen Xanthophoren und Iridocyten.

Wenn das Gehirn genügend gross ist, so bildet sich über der Chorda, wie gewöhnlich, eine Rinne ([10],[13]). Wenn sich nur einzelne Gruppen von Nervenzellen bilden und die Chorda sich gleichzeitig in engem Kontakt mit der Epidermis befindet, so liegen die Nervenzellen ihr so zu Seite, als ob die Chorda sie nach den Seiten verdrängt hätte. Wenn die Chorda der verdickten mehrschichtigen Epidermis unmittelbar unterlagert ist, so bildet sich in der Epidermis über der Chorda eine Rinne, ebenso wie dies im Nervensystem geschieht. Wie auch dort, liegt über der Chorda eine Schicht von platten Epithelzellen. Dies erlaubt anzunehmen, dass die Wirkung der Chorda in beiden Fällen ähnlich ist, und vielleicht im mechanischen Zusammenziehen der Zellen besteht.

Von den Derivaten der Neuralwülste entwickelt sich, wie schon darauf hingewiesen wurde, der Visceralknorpel nur in dem Fall, wenn im Kopfgebiet auch andere Wülstderivate entstehen. Wenn eine Gruppe von Nervenzellen auf einem begrenzten Gebiet an einer Seite des Kopfes anliegt,

so entwickelt sich auch nur unter diesem Gebiet an einem Kiemenbögen dieser Seite Knorpel, usw. In dem Falle, wo die Wülstderivate fehlen, entsteht auch kein Knorpel an den Kiemenbögen. Ihr Mesoderm bildet sich nur in Muskelzellen um, und nicht in Knorpel—was noch als ein weiterer Beweis für die Herkunft des Visceral- und ein Teil des Schädelknorpels aus den Neuralwülsten dienen kann.

Von der anderen Ektodermderivaten entwickelten sich bei 4 Keimen freie Linsen. Bei 2 von ihnen fehlten überhaupt jegliche Nervenelemente (bei einem waren 2 Linsen vorhanden); bei dem 3-ten befand sich in der Nähe der Linse ein äusserst kleines Hirnfragment, bei dem 4-ten ging die Linse in solch ein Fragment über. Die Linsen waren vollkommen differenziert; ihre Herkunft ist unklar.

Bei einer bedeutenden Prozentzahl von Fällen entwickelten sich Hörblasen. Wenn in dem Hörblasengebiet Gehirnteile entstanden, so befanden sich auch immer ihnen zur Seite normale paarige Hörblasen. Wenn sich das Gehirn zusammenzieht, so ändert sich auch die Lokalisation der Hörblasen, und sie folgen dem Gehirnfragment. Wenn das Gehirn im Hörblasengebiet sehr klein ist, dann können: 1) die oberen Teile der Blasen miteinander so verschmelzen, dass eine teilweise verdoppelte Blase entsteht, oder 2) kann aber wenn vor und hinter der Blase das Gehirn nicht sehr klein ist, sich aber unter der Blase stark verkleinert, die Blase am Gehirnrest sitzen und ist mit dem Gehirn gleichsam wie ein Teil von ihm verschmolzen. Letzteres wurde auch bei einem Teil solcher Fälle beobachtet, wo der mediangelegene Streifen des Gehirns bei der Operation nicht entfernt wurde. Schliesslich gab es auch solche Fälle, wo das Gehirn nur von hinten die Hörblase berührte, und solche, wo das Gehirn sich aus dem Transplantat nur im hinteren Rumpfteil entwickelte, aber in dem Hörblasengebiet nicht vorhanden war. In den letzten Fällen liegen die unpaarigen Blasen median und sind dem Bau nach vollständig symmetrisch; alle ihre Sinnesflecken und Kanalanlagen wiederholen sich spiegelbildlich. Die Differenzierung der Blase steht der Kontrolle nicht nach. Alle Blasen sind von normal gebildeter Knorpelkapsel umgeben.

Es ist klar, dass nicht nur das Nervensystem die Fähigkeit besitzt Hörblasen zu induzieren ([11]), sondern auch das Mesoderm ([4],[5]). Die Hörblasen induzieren kann nicht nur das Gehirn oder das Mesoderm, die unter ihrem normalen Bildungsort liegen, sondern alle Teile des Mesoderms des Hörblasenniveaus, welche höher nach dem Rücken liegen. In der Zeit, wo das Ektoderm die Fähigkeit verliert, Nervenzellen zu bilden, entstehen sie nur in den Teilen, wo die Wirkung des Induktors am stärksten ist; schliesslich bilden sie sich auch dort nicht mehr, und dann entwickeln sich an ihrer Stelle Hörblasen. Die Fähigkeit zur Blasenbildung verschwindet augenscheinlich nur etwas später, als die Fähigkeit zur Bildung von Nervenzellen. Dafür spricht der Umstand, dass in den Fällen, wo einzelne Blasen entstanden, auch gleichzeitig Nervenzellen induziert wurden, wenn auch im hinteren Körperteil. Zusammen mit den Blasen entwickelt sich gewönlich auch eine Anzahl von Neuralwülstenderivaten, was möglicherweise auch den Anlass gab anzunehmen, dass das Material der Neuralwülste an der Induktion der Blasen Anteil nimmt. Die Verschmelzung der Blasen mit dem Gehirn und einige andere Erwägungen veranlassen zuzulassen, dass die epithelartige Zelle des Gehirns und der Hörblasewände, jedenfalls während der früheren Stadien, gleiche Zelltypen darstellen; es ist möglich, dass dieselben auch in den Neuralwülsten entstehen.

Die Haftfäden entstehen nicht selten in vermehrter Anzahl (bis 9), an dem vorderen Körperende des Keimes, hauptsächlich aus dem Wirtsgewebe. Wenn das Transplantat das Bildungsgebiet der Haftfäden in 2 Teile teilte, so entstanden die Haftfäden gewöhnlich an ihren Seiten.

Wenn sie aber dennoch aus dem Transplantat entstanden, so waren dies gewöhnlich 1—2 verhältnismässig kleine Haftfäden, welche der Medianebene nahe lagen. Andererseits, hängt die Zahl der Haftfäden davon ab, ob ein Kontakt zwischen Entoderm und Ektoderm besteht. In Abwesenheit des Gehirns hat das Mundentoderm das Aussehen eines runden Stranges, welches manchmal das Ektoderm nicht erreicht oder mit ihm in schwacher Verbindung steht; so wie in den Versuchen von Balinsky ([2]), entstanden in dem Gebiet der Verbindung des Entoderms mit dem Ektoderm keine Haftfäden. Wenn das Ektoderm an dem vorderen Körperende dem unterlagernden Mesoderm nicht angehaftet blieb, so entstanden nicht viele kleine, sondern dem Durchmesser nach 2 enorme Haftfäden.

Bei der Entwicklung der äusseren Kiemen bestehen in allgemeinen Zügen dieselben Gesetzmässigkeiten. Die Ektodermschicht ihres Epithels entsteht gewöhnlich aus dem Wirtsektoderm. Wenn das Transplantat einen Teil des Kiemenbückels bedeckt, so bilden sich die Kiemen unmittelbar in der Nähe des Transplantatrandes. Im Falle jedoch, wo das Transplantat den Kiemenbückel ganz bedeckt, entwickeln sich manchmal die Kiemen aus dem Transplantat. Dann entstehen sie ortsgemäss, sind aber kleiner und unvollständig entwickelt. Die Angaben über die Bedeutung des Mesektoderms für die Entwicklung der Kiemen und der Haftfäden, wie auch über den Bau ihres Epithels sollen in der ausführlichen Arbeit behandelt werden.

Ungeachtet dessen, dass in 14 Fällen die Nervenzellen bei dem Keim vollständig fehlten, entwickelten sich die Vorderextremitäten gerade so wie bei Tieren, bei denen ein Nervensystem vorhanden war ([12]). Bei 18% der Versuchskeime entstanden überzählige Extremitäten, die sich ihrer Entwicklung nach von den normalen nicht unterschieden. Wenn sie hinter den normalen Extremitäten liegen, so ist ihre Vornhintenachse von hinten nach vorne gedreht ([1]); wenn sie höher als die normalen Extremitäten liegen, so ist ihre Dorsoventralachse umgedreht. Die Extremitäten, die median liegen, sind völlig symmetrisch, ihnen fehlt die Dorsalventralasymmetrie. In der Nähe der überzähligen Extremitäten liegt immer ein Pronephros; manchmal entwickelt sich im Zusammenhang mit ihnen ein Extremitatengürtel. Der Vergleich der Fälle, wobei überzählige Extremitäten entstanden, zeigt, dass in dem Gebiet der überzähligen Extremitäten kein unmittelbarer Kontakt zwischen Epidermis und Mesoderm besteht. Wahrscheinlich ist das die Folge der Bildung von Falten im Transplantat bei der Operation; diese Falten waren der Ort der Mesenchymanhäufung, was zur Anlagerung von Extremitäten führte ([3]).

Die Bedeutung des Nervensystems für die Bewegungen des Keimes bestätigt schon bekannte Angaben. Der Darm zeigte bei nervenlosen Keimen peristaltische Bewegungen, das Herz klopfte; Kontraktionen der Skelettmuskulatur fanden nicht statt. Wenn der mediane Teil der Nervenplatte erhalten bleibt, dann kontrahieren sich die Keime entweder autonom oder nach einem Reiz im Gehirn. Wenn das Nervensystem induziert wurde, so besassen die Keime sensible und motorische Nerven, ihre Bewegungen waren aber nicht koordiniert (auf einen Reiz reagierten sie mit Zittern).

Die angeführten Tatsachen erlauben einige allgemeine Schlussfolgerungen zu ziehen: 1) Die Fähigkeit ein und dieselben Organe zu induzieren ist auch nach oben und unten von ihrem normalen Bildungsort aus verbreitet. Je näher dem Rücken zu, desto stärker ist auch die Induktionsfähigkeit des Mesoderms in bezug auf die geprüften Organe; ihre Regionalbesonderheiten bleiben jedoch erhalten. 2) Der Vergleich der Entwicklung des Nervensystems, Hörblasen, Kiemen und Haftfäden zeigt, dass die Organe sich auf dem höchst möglichen Punkt ihres Niveaus entwickeln. Wenn aber ein Teil dieses Feldes

von einer anderen Anlage eingenommen wird, so entsteht das neue Organ neben seinem Rande. So verhalten sich gegenseitig die Nervenplatte und die Hörblasen. Dieses Prinzip der „besetzten Orte" ist der Mechanik der Musterbildung auf dem Schmetterlingsflügel sehr ähnlich, wo ebenfalls nach der Entfernung der Zentralfelder die dadurch getrennten Randfelder der Zeichnung sich zu einem Ganzen verschmelzen (6). 3) Die Asymmetrie der Hörblasen und der Extremitäten ist durch ihre Lage in den Mesodermfeldern bestimmt, bei welchen sich einige Qualitäten (welche mit ihren Induktionsfähigkeiten im Zusammenhange stehen) von der Chorda zum Bauch verändern.

Institut für Zytologie, Histologie und Embryologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

Eingegangen
den 17. XII. 1940.

ZITIERTE LITERATUR

[1] B. I. Balinsky, Arch. Entw.-Mech., **130**, 704 (1933). [2] B. I. Balinsky, C. R. Acad. Sci. URSS, XVII, 495 (1937). [3] D. P. Filatow, Arch. Entw.-Mech., **121**, 288 (1930). [4] R. G. Harrison, Anat. Rec., **64**, suppl. 1, 38 (1935). [5] R. G. Harrison, ibid., **70**, suppl. 3, 35 (1938). [5] K. Henke, Verh. dtsch. zool. Ges., 176 (1935). [7] J. Holtfreter, Biol. Zbl., **53**, 404 (1933). [8] J. Holtfreter, Arch. Entw.-Mech., **134**, 466 (1936). [9] J. Holtfreter, ibid., **138**, 163 (1938). [10] J. Holtfreter, Arch. exp. Zellf., **23**, 169 (1939). [11] G. V. Lopashov, C. R. Acad. Sci. URSS, XV, 283 (1937). [12] L. W. Poležajew, ibid., XXI, 361 (1938). [13] H. Spemann, Experim. Beiträge zu einer Theorie der Entwicklung (1936).

Übersetzt von G. Streich.

PRIX D'ABONNEMENT

Un an — 36 livraisons . . . . $ 15.00. Frs. fr. 250.00. £ 2.8.0
Six mois — 18 livraisons . . . $ 7.50. Frs. fr. 125.00. £ 1.4.0
(Séparément $ 0.50. Frs. fr. 8.00. £ 0.1.6 le numéro)

USSR	— MEZHDUNARODNAJA KNIGA, 18, Kuznetski Most, Moskva.
USA	— Four Continent Book Corporation, 255 Fifth Avenue, New York, N. Y.
BELGIQUE	— «OBLA», 6/8/10, rue Duquesnoy, Bruxelles.
BULGARIA	— «RUSKA KNIGA», ul. kn. Boris 2, Sofia.
	— T. F. TSCHIPEFF, Boulevard Dondukoff 20/22, Sofia.
CHINA	— Fleet's Book Store, 798 Avenue Joffre, Shanghai.
DANMARK	— S. U. V.'s Boghandel. Frederiksborggade, 42—1. København.
DEUTSCHLAND	— KOEHLER & VOLCKMAR, A. G. & Co., Russland-Abteilung, Leipzig C. 1. Postfach 173.
GREAT BRITAIN	— Collet's Bookshop, Ltd., 66 Charing Cross Road, London, W. C. 2.
JUGOSLAVIJA	— GECA KON A. G. Post. fah 103, Beograd.
MAGYARORSZAG	— Grill'sche Buchhandlung, Dorottya ut. 2, Budapest.
NEW ZEALAND	— Progressive Books, Ltd. 18 Darby Street, Auckland C. 1.
	— Modern Books, 12 Woodward Street, Wellington C. 1.
NORGE	— JOHAN GRUNDT TANUM, Karl Johans gt. 43, Oslo.
ROMANIA	— «LOUVRE», strada Bibescu Voda 2, Bucureşti.
SCHWEIZ	— Buchhandlung Stauffacher, Lutherstrasse 6, Zürich.
SOUTH AFRICA	— Peoples' Bookshop. (Pty.), Ltd., Trades Hall, Kerk Street, Johannesburg.
SUOMI	— Akateeminen Kirjakauppa, Helsinki.
	— Rautatiekirjakauppa O. Y., Köydenpunojankatu 2, Helsinki.
SVERIGE	— WENNERGREN-WILLIAMS A. B., Box 657, Stockholm.
	— C. E. FRITZE's Kgl. Hofbuchhandlung. Fredsgatan 2, Stockholm.
TÜRKIA	— LIBRAIRIE HACHETTE, 469, Avenue de l'Indépendance, Boîte Postale Péra 2219. Istanbul.
PALESTINE	— S. ISERSKY, Grusenberg Street 24, Tel-Aviv. P. O. B. 656.
	— «MASSADAH», Ltd., Herzl Street, 2, Tel-Aviv.

Les «Comptes Rendus», largement expediés à l'étranger dans les centres scientifiques les plus importants et dans les bureaux de nombreuses revues, sont le seul organe scientifique en URSS, donnant tous les dix jours un compte rendu des plus récentes acquisitions de la science soviétique.

PUBLISHING HOUSE OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

JOURNAL OF PHYSICS

Edited by **S. I. WAWILOW**, Member of the Academy of Sciences.
Editorial Secretary: Prof. **S. M. RYTOV**, D. Sc.

Journal of Physics deals with problems of theoretical and applied physics.

Journal of Physics is published in English, French and German.

Journal of Physics appears monthly; it is issued in two volumes per annum, 6 numbers per volume.

Subscription price: U. S. $ 8.00 per annum. $ 1.00 single copy.

Orders to be placed with:

SSSR—«Mezhdunarodnaja Kniga», 18 Kuznetski Most, Moskva.
USA—Four Continent Book Corporation, 255 Fifth Avenue New York, N. Y.
BELGIQUE—«Obla», 6/8/10, rue Duquesnoy, Bruxelles.
BULGARIA—«Ruska Kniga», ul. kn. Boris, 2, Sofia. T. F. Tschipeff, Boulevard Dondukoff, 20/22, Sofia.
CHINA—Fleet's Book Store, 798 Avenue Joffre, Shanghai.
DANMARK—S.U.V's Boghandel. Frederiksborggade, 42—1, København.
DEUTSCHLAND—Koehler & Volckmar A.-G. & Co., Russland-Abteilung, Leipzig C. 1. Postfach 173.
GREAT BRITAIN—Collet's Bookshop, Ltd., 66 Charing Cross Road, London, W. C. 2.
JUGOSLAVIJA—Geca Kon A.-G. Post. fah 103, Beograd.
MAGYARORSZAG—Grill'sche Buchhandlung, Dorottya ut. 2, Budapest.
NEW ZEALAND—Progressive Books, Ltd., 18 Darby Street, Auckland C. 1.
NEW ZEALAND—Modern Books, 12 Woodward Street, Wellington C. 1.
NORGE—Johan Grundt Tanum, Karl Johans gt., 43. Oslo.
ROMANIA—«Louvre», Strada Bibescu Voda, 2, Bucureşti.
SCHWEIZ—Buchhandlung Stauffacher, Lutherstrasse 6, Zürich.
SOUTH AFRICA—People's Bookshop (Pty.), Ltd. Trades Hall, Kerk Street, Johannesburg.
SUOMI—Akateeminen Kirjakauppa, Helsinki.
—Rautatiekirjakauppa O. Y., Köydenpunojankatu 2, Helsinki.
SVERIGE—Wennergren-Williams A.-B. Box 657, Stockholm.
—C. E. Fritze's Kgl. Hofbuchhandlung, Fredsgatan 2, Stockholm.
TÜRKIA—Librairie Hachette, 469 Avenue de l'Indépendance, Boîte postale Péra 2219, Istanbul.
PALESTINE—S. Isersky, Grusenberg Street 24, Tel-Aviv. P. O. B. 658.
—«Massadah», Herzl Street, 2, Tel-Aviv.

EDITORIAL OFFICE: Moscow, 47, 3rd Miusskaya Ulitsa, No. 3, Physical Institute of the Academy of Sciences of the USSR.